MATEMATIK M5

JONAS SJUNNESSON
MARTIN HOLMSTRÖM
EVA SMEDHAMRE
LARS JAKOBSSON
KLAS NILSON

Kapitel 1 med tillhörande facit

ISBN 978-91-47-10928-9
© 2013 Jonas Sjunnesson, Martin Holmström, Eva Smedhamre, Lars Jakobsson, Klas Nilson och Liber AB

Projektledare: Calle Gustavsson
Redaktör: Thomas Aidehag
Formgivning och layout: Cecilia Frank/Frank Etc. AB
Omslag: Cecilia Frank
Bildredaktör: Marie Olsson
Illustrationer: Björn Magnusson, Cecilia Frank
Faktor: Adam Dahl

Första upplagan
1

Repro: Exaktaprinting AB, Malmö
Tryck: Kina 2013

KOPIERINGSFÖRBUD

Detta verk skyddas av upphovsrättslagen! Kopiering, utöver lärares och elevers rätt att kopiera för undervisningsbruk enligt BONUS-avtal är förbjuden. BONUS-avtal tecknas mellan upphovsrättsorganisationer och huvudman för utbildningsanordnare, t.ex. kommuner/universitet. Den som bryter mot lagen om upphovsrätt kan åtalas av allmän åklagare och dömas till böter eller fängelse i upp till två år samt bli skyldig erlägga ersättning till upphovsman/rättsinnehavare.

Liber AB, 113 98 Stockholm
08-690 92 00
www.liber.se
kundservice tfn 08-690 93 30, fax 08-690 93 01
e-post: kundservice.liber@liber.se

Innehåll

1 MÄNGDLÄRA OCH KOMBINATORIK 6

1.1 Mängder 8
Begreppen tom mängd, delmängd och grundmängd 10
Venndiagram 12
Mängdoperationer 14
Komplementmängd och differens 17
Upptäck & Visa: Hitta samband 20

1.2 Repetition av sannolikhetslära 21
Sannolikhet och mängdlära 22
Sannolikhet vid försök i flera steg 24

1.3 Kombinatorik 28
Multiplikationsprincipen 28
Permutationer 30
Kombinationer 35
Binomialsatsen 39
Binomialfördelning 43
Digitala rutan: Spela Yatzy 45

1.4 Grafteori 46
Inledande exempel 46
Eulervägar och Hamiltonvägar 50
Aktivitet: Den handelsresandes problem 53

Sammanfattning 54
TEST 1 56
Blandade uppgifter 59

2 TALTEORI 62

2.1 De hela talen 64
Delbarhet och primtal 64
Aktivitet: Eratosthenes såll 69

2.2 Kvot och rest 70
Aktivitet: Periodiska decimalutvecklingar 72
Största gemensamma delare, Euklides algoritm 73
Aktivitet: Diofantiska ekvationer 77

2.3 Kongruens 79
Kongruensräkning 83

2.4 Talföljder 86
Aritmetiska talföljder 86
Geometriska talföljder 90
Rekursiva talföljder 95
Digitala rutan: Talföljder och kalkylblad 98
Summanotation 101

2.5 Induktion 103
Upptäck & Visa: Handskakningsproblemet 106

Sammanfattning 107
TEST 2 108
Blandade uppgifter 109

3 DIFFERENTIALEKVATIONER 112

3.1 Differentialekvationerna $y' = f(x)$ och $y'' = f(x)$ 114

3.2 Differentialekvationen $y' = ky$ 117
Upptäck & Visa: Allmän lösning till $y' + f(x)y = 0$ 119
Tillämpningar på första ordningens differentialekvationer 120

3.3 Riktningsfält 124

3.4 Eulers stegmetod 128
Digitala rutan: Eulers stegmetod med datorstöd 131

3.5 Logistiska tillväxtekvationen $y = ky(M - y)$ 132

3.6 Differentialekvationen $y'' + ay' + by = f(x)$ 136
Tillämpningar på andra ordningens differentialekvationer 140

3.7 Tillämpningar 142
Aktivitet: Dämpad svängning 147

Sammanfattning 148
TEST 3 149
Blandade uppgifter 151

4 FÖRDJUPAD INTEGRAL- OCH DIFFERENTIALKALKYL 156

4.1 Förändringshastighet och derivering 158
Implicit derivering 162

4.2 Generaliserade integraler 167
Upptäck & Visa: Generaliserade integraler 169
Generaliserade integraler och volymer 170
Generaliserade integraler i naturvetenskapen 172

4.3 Integrationsmetoder 174
Partialbråksuppdelning 174
Integralbestämning med partialbråk 176
Digitala rutan: Partialbråksuppdelning och integralbestämning 179
Partiell integration 181

4.4 Kurvlängd 184

Sammanfattning 187
TEST 4 188
Blandade uppgifter 189
Omfångsrika uppgifter 190
Omfångsrika uppgifter av undersökande karaktär 195

5 REPETITION 198

Facit 207
Facit tankenötter 227
Facit Aktivitet 228
Facit Digitala Rutan 229
Facit Upptäck & Visa 230
Sakregister 231

Mål

I det här kapitlet får du lära dig

- Mängdlärans notationer
- Utföra olika operationer på mängder
- Rita venndiagram och använda dessa för att dra slutsatser
- Begreppen permutation och kombination
- Metoder för beräkning av antalet kombinationer och permutationer
- Använda binomialsatsen
- Egenskaper hos grafer
- Hitta Eulervägar och Hamiltoncykler
- Resonera kring grafteoretiska problem

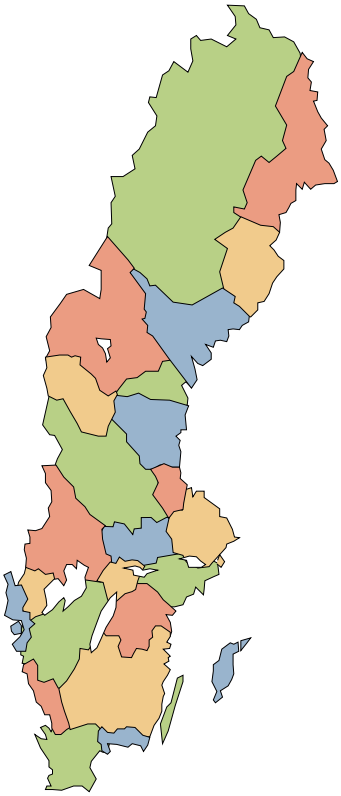
1 Mängdlära och kombinatorik

Man brukar säga att grafteorin började med problemet om Königsbergs sju broar (se s. 50) som den schweiziska matematikern Leonhard Euler formulerade i mitten av 1700-talet. Cirka hundra år senare kom *fyrfärgsproblemet* som lyder så här.

Tänk dig att du har en karta, t ex över Europas länder eller över Sveriges kommuner eller helt enkelt en karta över en fantasivärld ritad på ett plant papper. Anta att du vill färglägga kartan så att två länder (eller kommuner) som gränsar till varandra (längs en hel gränslinje) alltid har *olika* färger. Hur många färger behövs det för att klara *alla* kartor?

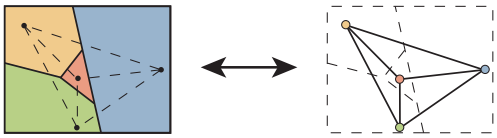
I kartan över Sverige ser du att det behövs fyra färger, men frågan är: räcker fyra färger för *alla* kartor? Problemet var olöst i över hundra år, men 1976 bevisade två matematiker verksamma i USA att *fyra färger räcker alltid*. Deras bevis bygger på en omfattande analys av ett stort antal olika fall med hjälp av dator.

Problemet kan reduceras till en enklare figur – en så kallad *graf* – där varje färgat område ersätts med en punkt, eller *nod*. Om områdena gränsar till varandra, illustreras detta med en linje, eller *kant* mellan noderna.



BEGREPP

- mängd
- delmängd
- venndiagram
- union och snitt
- komplementmängd
- permutation
- kombination
- binomialkoefficient
- graf
- noder och kanter
- vägar och cykler



1.1 MÄNGDER

Det finns många olika sorters månghörningar i figuren nedan: en triangel, två rektanglar, en femhörning och en sexhörning. Alla dessa figurer kan sägas vara *element* i *mängden* av alla månghörningar.

Talen 1, 2 och 5 är heltal. Med mängdlärans språk säger man att dessa tal är element i mängden av alla heltal. Talen $\frac{1}{2}$ och $\sqrt{2}$ tillhör inte mängden av heltal. De är däremot element i mängden av reella tal, vilket för övrigt även 1, 2 och 5 är.

DEFINITION: Mängd

En mängd definieras som en samling objekt. Objekten i mängden kallas element.

Mängder brukas anges med versaler, dvs stora bokstäver, och elementen med gemener, dvs små bokstäver.

Det finns många symboler i mängdläran. Om man vill ange att p är ett element i mängden A, skriver man

$p \in A$ (p tillhör mängden A)

och om man vill ange att q inte är ett element i mängden A skriver man

$q \notin A$ (q tillhör inte mängden A).

Om man vill beskriva att mängden A består av alla heltal mellan 1 och 10 kan man skriva

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Ett annat sätt att beskriva samma mängd är

$A = \{x: 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}$

Detta utläses ”mängden av alla x, sådana att x ligger mellan 1 och 10 och där x är ett heltal”.

EXEMPEL 1

Skriv med mängdsymboler

a) Bokstaven a tillhör inte mängden konsonanter, K, medan b tillhör denna mängd.

b) Talet π tillhör mängden reella tal, som betecknas $\mathbb{R}$.

c) Mängden A består av alla lösningar till ekvationen $x^2 = 4$.

d) Mängden B består av alla jämna heltal som är större än noll.

e) Mängden C består av alla månghörningar med fler än två och färre än fem hörn.

LÖSNING

a) $A \notin K$, $b \in K$

b) $\pi \in \mathbb{R}$

c) $x^2 = 4$ ger lösningarna $x = 2$ och $x = -2$.
Alltså är mängden $A = \{-2, 2\}$.

d) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$

e) $C = \{$trianglar och fyrhörningar$\}$

!

Vissa mängder används så ofta att de får speciella symboler

$\mathbb{N}$ betecknar mängden av alla naturliga tal,
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ betecknar mängden av alla heltal,
$\mathbb{Z} = \{\ldots -6, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$,

$\mathbb{Q}$ betecknar alla rationella tal, dvs. alla tal som kan skrivas som en kvot av två heltal, t ex $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ betecknar alla reella tal, t ex $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
(däremot $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

$\mathbb{C}$ betecknar alla komplexa tal, t ex är lösningarna till ekvationen $x^2 = -1$ element i $\mathbb{C}$

Begreppen tom mängd, delmängd och grundmängd

Den *tomma mängden* innehåller inga element och betecknas $\varnothing$.

Man kan konstruera en tom mängd på många sätt.

Om A är mängden av alla heltal som är lösningar till ekvationen $x^2 = 2$ så är A lika med tomma mängden, eftersom det inte finns någon heltalslösning till ekvationen.

Om B är en annan tom mängd, t ex mängden av alla negativa tal i intervallet $1 < x < 2$, så är A och B samma mängd, den tomma mängden.

Titta på de två mängderna $A = \{4, 8\}$ och $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
Vi ser att alla element som finns i mängden A också finns i mängden B.
Vi säger då att A en *delmängd* av B, vilket betecknas $A \subseteq B$.

Ibland kan det vara lämpligt att tänka sig de förekommande mängderna som en delmängd av en *grundmängd*, som betecknas U.

Om vi sysslar med mängder där elementen är människor kan U vara mängden av alla människor på jorden. Om elementen är reella tal kan det vara lämpligt att $U = \mathbb{R}$ är grundmängden.

EXEMPEL 2

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ och $C = \{1, 2, 3\}$

Gäller det att

a) A är en delmängd av B?
b) C är en delmängd av B?

LÖSNING

a) Eftersom alla element i mängden A även ingår i mängden B är A en delmängd av B. Detta kan skrivas $A \subseteq B$.

b) Det finns ett element i mängden C, elementet 1, som inte ingår i mängden B. Därför är inte C en delmängd av B. Detta kan skrivas $C \nsubseteq B$.

1101 $A = \{1, 3, 7, 12\}$ och $B = \{1, 7\}$. Vilka av följande påståenden är sanna?

a) $A \subseteq B$ b) $B \subseteq A$

c) $7 \in B$ d) $15 \notin A$

1102 Skriv med mängdsymboler

a) Talet 2 tillhör mängden av naturliga tal.

b) Talet e tillhör ej mängden rationella tal.

c) De naturliga talen är en delmängd av de reella talen.

d) Den tomma mängden är en delmängd av de naturliga talen.

1103 Låt K vara mängden av alla kvadrater, R mängden av alla rektanglar, k_1 en kvadrat med sidan 4 cm och r_1 en given rektangel. Vilka av följande påståenden är sanna?

a) $r_1 \in R$

b) $k_1 \notin R$

c) $K \subseteq R$

d) Både K och R är delmängder av mängden av alla fyrhörningar.

1104 Gör en lista på elementen i följande mängder.

a) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$

b) $B =$
$\{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ är ett jämnt tal}, x < 15\}$

c) $C = \{x: x \text{ är ett primtal}, x < 25\}$

1105 Sätt in symbolerna $\in$ och $\notin$ istället för rutorna.

a) $6 \square \{1, 4, 5, 6, 7\}$

b) $15 \square \{x : x \text{ är ett primtal}\}$

c) $8 \square \{x : x \text{ är ett komplext tal}\}$

d) $3 + 18i \square \{x : x \text{ är ett komplext tal}\}$

e) $18 \square \{3, 6, 9, \ldots\}$

1106 Ange alla element som tillhör både mängden $A = \{x : x \in \mathbb{Z}, -1 \le x \le 10\}$ och mängden $B = \{x : x \in \mathbb{R}, x \le 0\}$.

1107 Vilka av nedanstående mängder är den tomma mängden?

$A = \{x : x \in \mathbb{N}, 2x = 3\}$

$B = \{x : x \in \mathbb{R}, 3x = 4\}$

$C = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 = -1\}$

$D = \{x : x \in \mathbb{C}, x^2 = -4\}$

1108 Vad är det för skillnad mellan att skriva $5 \in \mathbb{N}$ och $\{5\} \subseteq \mathbb{N}$?

1109 Använd skrivsättet $\{x : x \ldots\}$ för att ange mängden $\{2, 4, 8, 16, \ldots\}$.

1110 Visa att $A = \{2, 3, 4\}$ inte är en delmängd av $B = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ är ett jämnt tal}\}$.

1111 Vilken mängd beskrivs här:

$$X = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}?$$

1112 Ange mängden B av alla reella tal b för vilka mängden $A = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x + b = 0\}$ blir den tomma mängden.

TANKENÖT 1

På Hilberts hotell finns oändligt många rum, numrerade 1, 2, 3, ... Hotellet är fullbelagt. Tio nya gäster anländer och vill ha varsitt rum. Hur ska man klara det?

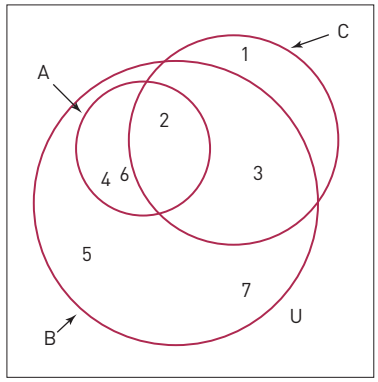
Venndiagram

Ett *venndiagram* är figurer som kan förtydliga mängdläran.
(Venn var en engelsk matematiker som var med om att skapa mängdläran.)
Grundmängden U illustreras i ett venndiagram med en rektangel och alla delmängder av grundmängden som slutna figurer inom denna rektangel.

Med ett venndiagram kan vi tydligt illustrera mängderna

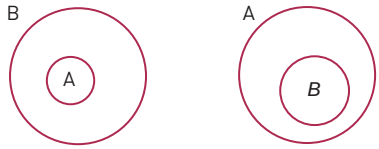
$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ och $C = \{1, 2, 3\}$.

Man ser tydligt att A är en delmängd av B, men att C inte är en delmängd av A.

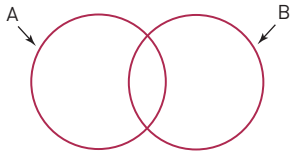


Om vi endast har två mängder, A och B kan fyra fall inträffa, vilket illustreras av följande fyra figurer:

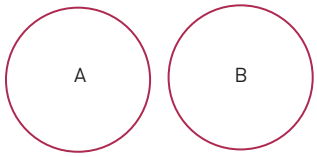
Alla element i A ingår också i B, dvs $A \subseteq B$. Alternativt kan alla element i B ingå i A, dvs $B \subseteq A$.



Det finns element som tillhör både A och B. Men det finns också element i A som inte tillhör B och det finns element i B som inte tillhör A.



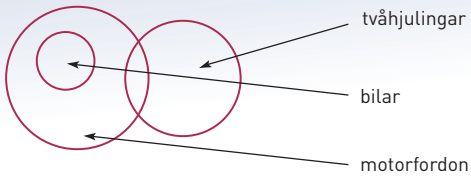
Det finns inga gemensamma element i A och B. Mängderna sägs vara *disjunkta*.



EXEMPEL 1

Beskriv med hjälp av venndiagram de tre mängderna: mängden av alla motorfordon, mängden av alla tvåhjulingar och mängden av alla bilar.

LÖSNING

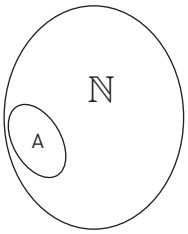


1113 Rita venndiagram för mängderna $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{8, 10, 12, 15\}$ och $C = \{12, 15\}$.

1114 Rita venndiagram för mängderna: mängden av alla röda hus och mängden av alla gula hus. Grundmängden kan vara mängden av alla hus.

1115 Rita venndiagram för mängden av alla bokstäver och mängden av alla vokaler.

1116 Mängden $\mathbb{N}$ är mängden av alla naturliga tal. Vad skulle mängden A kunna vara?



1117 Ge exempel på en mängd som är disjunkt till mängden

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$.

1118 Rita venndiagram för följande fyra mängder:

A: alla rektanglar

B: alla trianglar

C: alla kvadrater

D: alla rektanglar höjden 2 cm

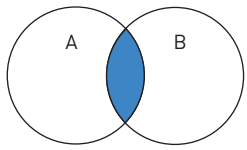
1119 Mängderna A och B är disjunkta. B är en delmängd av mängden C. Några av elementen som tillhör A tillhör även C. Beskriv situationen med ett venndiagram.

1120 Vad menas med att två mängder är disjunkta? Förklara med exempel.

1121 Nedan ser du två mängder.

A: Män mellan 20 år och 30 år.

B: Arbetslösa män.



a) Är dessa mängder disjunkta?

b) Tolka betydelsen av det skuggade området.

Mängdoperationer

Union och snitt

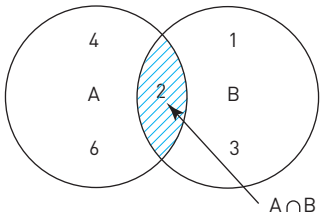
Låt oss studera två mängder

$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$

Mängderna A och B har ett enda element gemensamt, nämligen talet 2. Man säger då att *snittet* (*skärningsmängden*) av A och B är 2. Detta skrivs i symboler $A \cap B = \{2\}$ och utläses A snitt B är lika med mängden som består av talet 2.

Snittmängden består alltså av de element som finns i mängd A *och* i mängd B.

Den streckade delen i figuren representerar $A \cap B$.



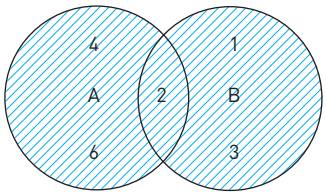
Tillsammans omfattar mängderna A och B talen 1, 2, 3, 4 och 6. Man säger att *unionen (föreningsmängden)* av A och B är dessa tal. Uttryckt i symboler skriver vi

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Detta utläses A union B är lika med mängden av talen 1, 2, 3, 4, 6.

Unionmängden består alltså av de element som finns antingen i mängden A *eller* i mängden B *eller* i både A och B.

Den streckade delen i figuren representerar $A \cup B$.



DEFINITION: Union och snitt

Snittet av två mängder A och B, som betecknas $A \cap B$, är mängden av alla element som tillhör *både* A och B.

I symboler skrivs detta $A \cap B = \{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$.

Unionen av två mängder A och B, som betecknas $A \cup B$, är mängden av alla element som tillhör *A eller B* (eller både A och B).

I symboler skrivs detta $A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$.

EXEMPEL 2

Bland eleverna på en skola använder 243 Facebook, 61 Instagram och 20 Twitter. Man vet också att

47 använder både Facebook och Instagram,

13 både Facebook och Twitter och

9 både Instagram och Twitter.

Dessutom vet man att 5 elever använder alla tre tjänsterna och att 12 elever inte använder någon av dem.

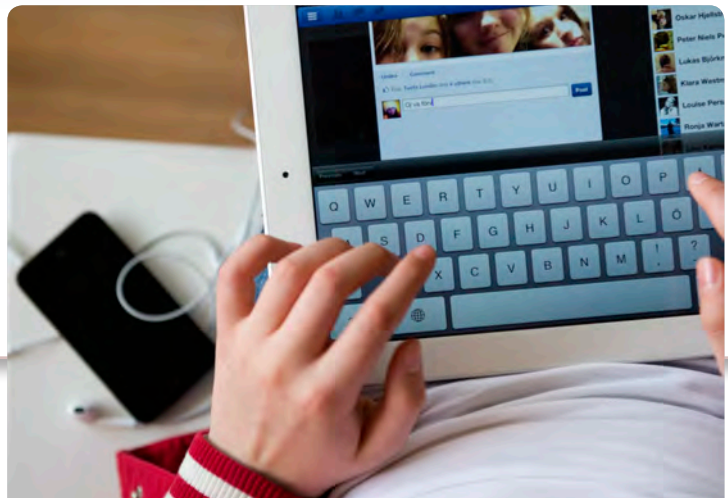
Mängden av alla elever med Facebook betecknas F, mängden av alla med Instagram I och mängden av alla med Twitter T.

Hur ska man beteckna mängden av de elever som

a) använder både Facebook och Instagram?

b) använder antingen Facebook eller Twitter eller både och?

c) Hur många elever finns på skolan?

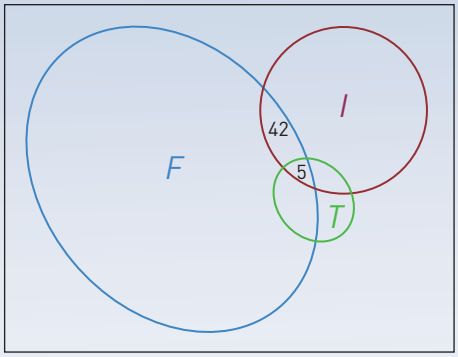


LÖSNING

a) Mängden av elever som använder både Facebook och Instagram är snittet mellan mängderna F och I och betecknas $F \cap I$.

b) Här avses unionen mellan mängderna F och T och betecknas $F \cup T$.

c) För att kunna svara på frågan ritas ett venndiagram.



I uppgiften anges att det är 5 elever som tillhör alla tre mängderna. Denna mängd är snittet mellan mängderna F, I och T.

47 elever tillhör både F och I. Om man tar bort de 5 elever som finns i alla tre mängder får man $(47 - 5) = 42$ elever som endast använder Facebook och Instagram.

På motsvarande sätt får vi fram att 8 elever endast tillhör F och T, medan 4 elever endast tillhör I och T.

Det anges i uppgiften att 61 elever tillhör mängden I. Av dessa drar vi bort dem som även tillhör någon annan mängd. $61 - (42 + 5 + 4) = 10$ elever tillhör alltså endast I.

På motsvarande sätt får vi fram att 3 elever tillhör endast T och 188 elever tillhör endast F. Vi noterar även de 12 elever som inte tillhör någon av mängderna F, I och T, men däremot grundmängden (mängden av alla elever i skolan).

Vi är nu redo att summera ihop alla fält i venndiagrammet. Det totala antalet elever i skolan är: $5 + 8 + 4 + 42 + 3 + 10 + 188 + 12 = 272$

SVAR: a) $F \cap I$ b) $F \cup T$ c) 272 elever finns på skolan.

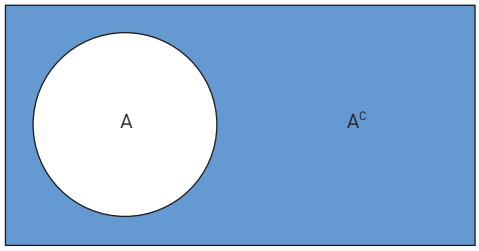
Komplementmängd och differens

På en skola finns 1 200 elever varav 35 studerar spanska. Om dessa 35 elever bildar mängden A kommer alla övriga elever att tillhöra *komplementmängden* till A. Denna mängd innehåller alltså $1\,200 - 35 = 1\,165$ element.

DEFINITION: Komplementmängd

Anta att $A \subseteq \mathbf{U}$, där U är en given grundmängd.
Alla element i U utom de som tillhör mängden A tillhör *komplementet* till A med avseende på U.
Komplementet till A betecknas A^c (eller ibland $\complement A$).

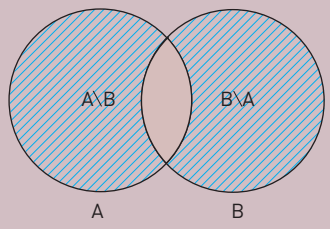
Tillsammans bildar en mängd och dess komplementmängd hela grundmängden, $A \cup A^C = U$.



Ytterligare ett begrepp som är bra att kunna är *differens*.

DEFINITION: Differens

Differensen $A \backslash B$ består av de element i A som inte tillhör B. I figuren är $A \backslash B$ och $B \backslash A$ markerat.



EXEMPEL 3

Vad är komplementmängden till $A = \{x: -4 \leq x \leq 6\}$ om $U = \mathbb{R}$?

LÖSNING

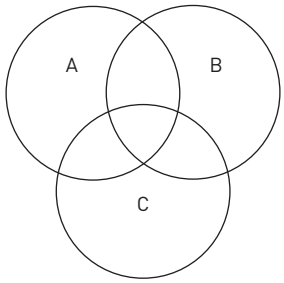
Mängden A markeras på en tallinje (streckad linje). Komplementmängden är övriga reella tal (markerad med heldragen linje):

Komplementet är $\{x: x < -4 \text{ eller } x > 6\}$

1122 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ och
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Bestäm $A \cup B$ och $A \cap B$.

1123 $A = \{x: -1 < x < 3\}$ och $B = \{x: -3 < x < 1\}$.
Bestäm $A \cup B$ och $A \cap B$.

1124 Rita av venndiagrammet och skugga



a) $A \cap B \cap C$
b) $(A \cup B) \cap C$
c) $B \setminus (A \cup B)$
d) $\complement(A \cup B \cup C)$

1125 Efter en gasolycka kom 77 hjälpsökande till sjukhuset. 49 personer hade andnöd och 38 personer klagade på huvudvärk. Sjukvårdspersonalen bedömde att patienter med endast huvudvärk skulle tillfriskna på egen hand. Patienter med andnöd var i behov av normal vård. Endast patienter med både andnöd och huvudvärk krävde specialisthjälp. Hur många patienter krävde specialisthjälp?

1126 Bestäm komplementmängden till
$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ om $U = \mathbb{R}$?

1127 Bestäm komplementmängden till
$A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 4\}$ om $U = \mathbb{Z}$?

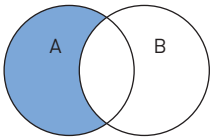
1128 Sätt $A = \{1, 2, 4, 5, 9, 11\}$,
$B = \{2, 5, 9, 17, 21\}$ och
$C = \{5, 9, 11, 13, 17\}$. Bestäm

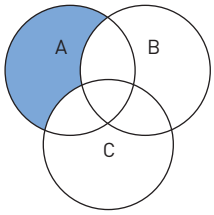
a) $A \cap B \cap C$
b) $A \cup (B \cup C)$
c) $A \cup (B \cap C)$
d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

1129 På en allergiklinik fanns 40 patienter. 16 personer var gluten-intoleranta, 18 laktosintoleranta och 17 damm-allergiska. 2 personer hade alla tre åkommorna, 7 tålde varken gluten eller laktos, 6 tålde inte gluten och damm och 5 tålde inte laktos och damm. De återstående patienterna hade ännu inte fått någon diagnos. Hur många var de?

1130 Antalet element i mängden A betecknas $|A|$. Man kan visa att $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Förklara varför termen $|A \cap B|$ måste dras bort.

1131 Beskriv med symboler den skuggade delen av venndiagrammen.





1132 Vilka av följande utsagor är sanna?

a) $\left(A^C\right)^C = A$

b) $A \cap A^C = U$

c) $A \cup A^C = \varnothing$

d) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

e) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

1133 På en skola gillar 70 % av eleverna hamburgare och 60 % gillar pizza. 50 % gillar både hamburgare och pizza. Hur många procent gillar varken hamburgare eller pizza?

1134 Av 2 000 personer har 80 högt blodtryck. 85 % av dem som har högt blodtryck, och 60 % av dem som inte har högt blodtryck, dricker alkohol. Hur många procent av dem som dricker alkohol har högt blodtryck?

1135 Visa med hjälp av venndiagrammet att

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Vem rakar barberaren?

Bertrand Russell (brittisk filosof och matematiker) formulerade 1901 en paradox om mängder, som kan beskrivas som barberarens paradox:

I en stad finns endast en barberare. Han rakar alla dem som inte rakar sig själva (men han rakar inga andra). Rakar barberaren sig själv?

Om han inte rakar sig själv, så tillhör han mängden av dem som han rakar. Om han rakar sig själv, så tillhör han inte mängden av dem som han rakar. Det blir alltså en pinsam motsägelse som visar att man måste vara försiktig när man definierar vad man menar med en mängd.

Russels paradox hade stort inflytande på matematiken och logiken under första hälften av 1900-talet.

Upptäck & visa

HITTA SAMBAND

Om mängden A består av ett ändligt antal element (ändlig mängd) betecknas antalet element i A med $|A|$ (kallas kardinaltalet eller mäktigheten för A).

Om t ex $A = \{2, 3, 5, 7\}$ så är $|A| = 4$.

Nedan ser du några utvalda mängder A och B.

	$\lvert A\rvert$	$\lvert B\rvert$	$\lvert A\cap B\rvert$	$\lvert A\cup B\rvert$
$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 5, 8, 9, 12\}$	4	5		
$A = \{1, 5, 8, 13, 15\}$, $B = \{1, 4, 8, 12, 15, 20\}$				
$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$				
$A = \{2, 6, 10, 14, 18, 20\}$, $B = \{2, 10, 8, 18\}$				

- Välj själv ytterligare två mängder A och B och fyll i tabellen.
- Formulera ett samband mellan $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|$ och $|A \cup B|$.
- Visa/motivera detta samband genom att rita ett venndiagram.

Nu skall du undersöka motsvarande samband då du har tre mängder A, B och C.

	$\lvert A\rvert$	$\lvert B\rvert$	$\lvert C\rvert$	$\lvert A\cap B\rvert$	$\lvert A\cap C\rvert$	$\lvert B\cap C\rvert$	$\lvert A\cap B\cap C\rvert$	$\lvert A\cup B\cup C\rvert$
$A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{2, 5, 8, 9\}$ $C = \{1, 3, 5, 8, 9, 10\}$	3	4	6					

- Välj själv ytterligare några mängder A, B och C och fyll i tabellen.
- Formulera ett samband mellan mängderna.
- Visa/motivera detta samband genom att rita ett venndiagram.

1.2 REPETITION AV SANNOLIKHETSLÄRA

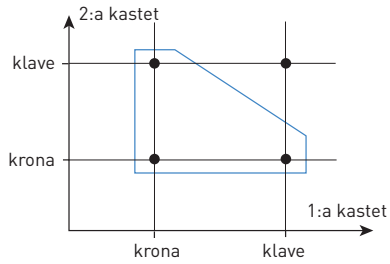
Begrepp i sannolikhetsläran:

- **Slumpmässigt försök.** Ett försök där man inte på förhand kan förutsäga vad som ska inträffa då det upprepas.
- **Utfall.** Ett möjligt resultat i ett slumpmässigt försök.
- **Utfallsrum.** Mängden av utfall i ett försök.
- **Händelse.** Ett utfall eller unionen av flera utfall i ett slumpmässigt försök.
- **Komplementhändelse.** Mängden av de utfall som inte ingår i en given händelse utan är de utfall som finns i resten av utfallsrummet.

Ett exempel på ett slumpmässigt försök är att *singla samma mynt två gånger.* Detta är samma sak som att singla två mynt samtidigt, förutsatt att mynten är identiska.

Utfallsrummet är i detta fall (krona, krona), (krona, klave), (klave, krona) och (klave, klave). Här skrivs utfallet vid första kastet först och det andra sist.

Observera att utfallsrummet kan ses som en mängd, vars element är de olika utfallen. Bilden till höger illustrerar detta försök.



Den markerade händelsen är ”minst ett mynt visar krona” och blir till en delmängd av utfallsrummet.

När alla utfall är lika sannolika (till exempel vid kast med symmetrisk tärning), har vi en *likformig sannolikhetsfördelning*. Sannolikheten kan då beräknas enligt följande:

DEFINITION: Sannolikhet vid likformig sannolikhetsfördelning

$$\text{Sannolikheten för en händelse} = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antal möjliga utfall}}$$

Sannolikhet och mängdlära

Med mängdlärans terminologi formulerar vi tre satser.

SATS: Sannolikhetslärans additionssats

$P(A \text{ eller } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

MOTIVERING:

Anta att händelse $A = \{5, 6\}$ betyder att få minst en femma vid ett tärningskast och händelse $B = \{1, 3, 5\}$ betyder att få ett udda tal vid nästa kast. Då får vi att $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$ och $A \cap B = \{5\}$.

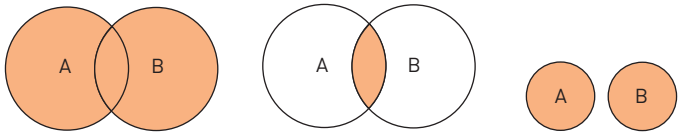
Detta ger att $P(A \cup B) = 4 / 6$ och $P(A \cap B) = 1 / 6$.

Resultatet stämmer bra med satsen eftersom

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$$

Vid summering av sannolikheten för två händelser måste man alltså subtrahera snittet annars ”räknas det två gånger”.

Om händelserna är disjunkta, alltså $A \cap B = \varnothing$, kan satsen förenklas till $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



SATS: Multiplikationsprincipen för två oberoende händelser

$P(A \text{ och } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

MOTIVERING:

$P(A \cap B)$ betyder sannolikheten att i första kastet slå minst en femma och i andra få ett udda poängtal vilket blir $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ vilket stämmer bra.

SATS: Sannolikheten för en komplementhändelse

$P(A^C) = 1 - P(A)$

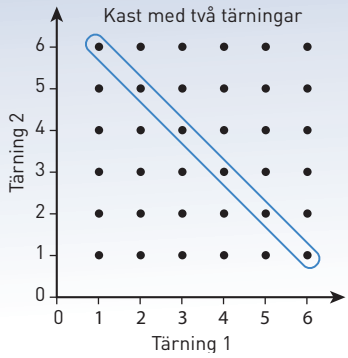
Vid kast med tärning är t ex sannolikheten för ”att få en sexa” $1 / 6$ och sannolikheten för komplementhändelsen ”att inte få en sexa” $1 - 1 / 6 = 5 / 6$.

EXEMPEL 1

Rita utfallsrummet vid kast med två tärningar och bestäm sannolikheten att få poängsumman 7.

LÖSNING

Utfallsrummet ritas.



Den inringade delen är utfallen i den aktuella händelsen.

Antalet gynnsamma utfall är 6 st.

Antal möjliga utfall är 36 st.

Sannolikheten att få summan 7 är alltså $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

SVAR: Sannolikheten är $\frac{1}{6}$.

EXEMPEL 2

I en väderprognos säger man att det är 30 % risk för regn på lördagen och 20 % risk för regn på söndagen.

a) Hur stor är risken att det regnar både på lördag och på söndag?

b) Hur stor är risken att det regnar på lördag eller söndag?

LÖSNING

Händelse A: regn på lördag, $P(A) = 0{,}30$.

Händelse B: regn på söndag, $P(B) = 0{,}20$.

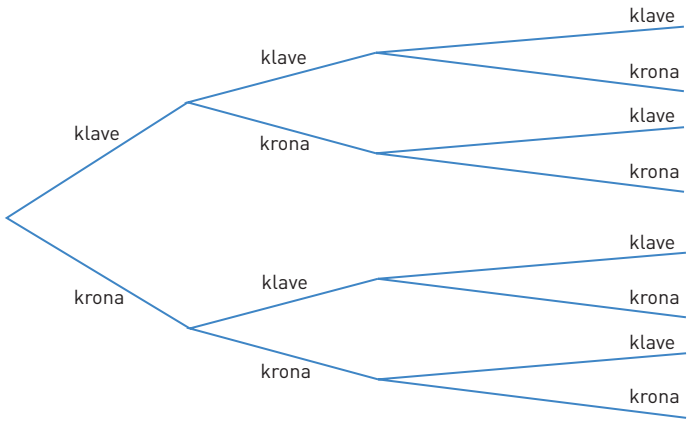
a) $P(A \text{ och } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06 = 6\ \%$

b) $P(A \text{ eller } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}06 = 0{,}44 = 44\ \%$

SVAR: a) 6 % b) 44 %

Sannolikhet vid försök i flera steg

Om ett försök upprepas kan man ibland ha glädje av att rita ett träddiagram. Detta är fallet om man vill veta sannolikheten att få tre klave om man kastar 3 mynt.



För att komma fram till resultatet kan du resonera på två principiellt olika sätt:

1. Det finns 8 olika utfall i utfallsrummet. Från vänster i trädet är de: ((klave, klave, klave), (klave, klave, krona), (klave, krona, klave), (klave, krona, krona), …, (krona, krona, krona)).

Eftersom alla är lika sannolika, har vart och ett av utfallen sannolikheten $\frac{1}{8}$.

2. I varje steg är sannolikheten för de båda utfallen lika.

Sannolikheten för ett av de två utfallen är $\frac{1}{2}$.

Enligt *multiplikationsprincipen* för sannolikheter blir sannolikheten

för vart och ett av utfallen vid tre kast $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Multiplikationsprincipen är även användbar då vi inte har likformig sannolikhetsfördelning.

Vi tittar på ett fall med slantsingling med ett skevt mynt:

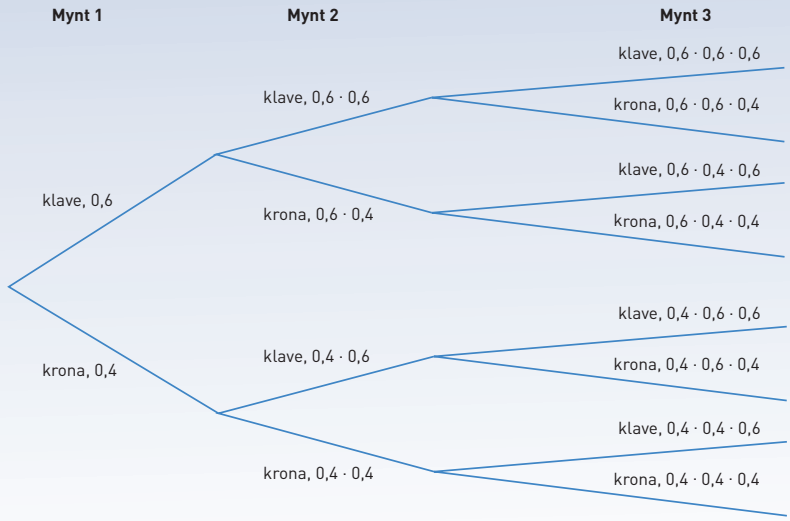
EXEMPEL 3

Ett skevt mynt ger klave med 60 % sannolikhet.
Bestäm sannolikheten att vid tre kast med det skeva myntet få

a) klave vid exakt ett kast?
b) få högst två klave?

LÖSNING

Träddiagram för försöket:



a) Med hjälp av träddiagrammet kan man konstatera att det finns 3 olika sätt att få klave en gång, nämligen i första, i andra eller i tredje kastet. Sannolikheten för var och en av dessa utfall är $0{,}60 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}40 = 0{,}096$.

Den sökta sannolikheten är $3 \cdot 0{,}096 = 0{,}29$.

b) Komplementhändelsen till högst två klave är tre klave. (Tillsammans utgör de hela utfallsrummet).
Sannolikheten för tre klave är $0{,}60 \cdot 0{,}60 \cdot 0{,}60 = 0{,}216$.

Sannolikheten för högst två klave är då $1 - 0{,}216 = 0{,}784$.

SVAR: a) Sannolikheten är 0,29 b) Sannolikheten är 0,784

1201 Du drar ett kort ur en kortlek. Hur stor är sannolikheten

a) att du får ett ess?

b) att du får en spader?

c) att du får hjärterdam?

1202 En slumptalsgenerator visar slumptalen 0–999. Hur stor är sannolikheten att generatorn visar

a) ett ensiffrigt tal?

b) ett tvåsiffrigt tal?

c) ett tresiffrigt tal?

1203 Du kastar två tärningar. Hur stor är sannolikheten

a) att siffersumman blir 6?

b) att siffersumman blir högst 6?

c) att siffersumman blir åtminstone 4?

d) att en av tärningarna visar 3?

e) att minst en av tärningarna visar 3?

f) att ingen av tärningarna visar 3?

1204 Hur stor är sannolikheten att vid tre kast med ett symmetriskt mynt få

a) exakt en klave?

b) ingen klave alls?

c) minst en klave?

1205 Bestäm sannolikheten att vid tre kast med ett skevt mynt få

a) krona vid exakt ett kast?

b) få minst en krona.

Det skeva myntet ger krona med 70 % sannolikhet.

1206 Ett symmetriskt mynt singlas fyra gånger. Rita ett träddiagram för försöket och besvara följande frågor med hjälp av detta.

a) Hur många utfall finns det som ger två klave?

b) Hur stor är sannolikheten att få två klave?

c) Hur stor är sannolikheten att få minst två klave?

1207 En skytt träffar mitt i prick med sannolikheten 0,85. Han skjuter tre skott i följd. Hur stor är sannolikheten att

a) alla tre skotten träffar mitt i prick?

b) två av skotten träffar mitt i prick?

c) minst ett av skotten träffar mitt i prick?

1208 Ur en väl blandad kortlek plockar Jerker ut fem kort. Tre av dem är hjärter. Jerker slänger de två andra och plockar ut två nya kort ur kortleken. Han påstår att eftersom det finns fyra färger är sannolikheten för att få två hjärter till $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \approx 0{,}06$.

Har Jerker rätt?

1209 Man väljer slumpmässigt ut en elev i en viss årskurs och tittar på betyget i kurserna fysik 1 och i matematik 1. Vi antar att

sannolikheten för att få A i matematik 1 (händelse B) är 0,07.

sannolikheten för att få A i fysik 1 (händelse C) är 0,06.

sannolikheten att få A i båda ämnena ($B \cap C$) är 0,04.

Beräkna sannolikheten för följande händelser

a) Åtminstone ett A ($B \cup C$).

b) Inget A.

c) A i det ena ämnet, men inte i det andra.

1210 Vid tillverkning av en viss produkt kan två olika fel uppträda. Fel A och Fel B. Sannolikheten för att en slumpvis utvald produkt har fel A är 0,008, fel B 0,015 och båda felen 0,003. Beräkna sannolikheten för

a) minst ett fel. b) inget fel.

c) exakt ett fel.

1211 För två sannolikheter A och B är det givet att $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}8$ samt att $P(A \cup B) = 0{,}9$. Bestäm $P(A \cap B)$.

1212 Har du någon gång stött på en kompis någonstans och tänkt: ”Vilket sammanträffande”?

Om chansen är 1 på N att något skall inträffa och vi upprepar detta försök N gånger (man upprepar alltså ett försök med sannolikheten $\frac{1}{N}$, N gånger) är chansen att händelsen aldrig skall inträffa $\left(1-\frac{1}{N}\right)^N = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$.

Detta innebär att chansen att händelsen inträffar minst en gång är
$1 - 0{,}37 = 0{,}63 = 63\ \%$!
Om chansen att vinna 5 miljoner på lotto är 1 på 4 miljoner så har du 63 % chans att vinna om du spelar 4 miljoner gånger.

Förklara uttrycket $\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$.

1213 Ur en kortlek drar du 5 kort, varav två är ess. Du slänger de tre övriga korten och tar tre nya. Hur stor är sannolikheten att du får fyrtal?

1214 I en klass på 25 elever görs följande experiment. Var och en av eleverna får välja ett av talen 1, 2, 3, 4, …, 99, 100 och skriva upp på en lapp. Ingen får veta vad de andra skrivit. Hur stor är sannolikheten att åtminstone två elever väljer samma tal?

1.3 KOMBINATORIK

I sannolikhetslära är man ofta intresserad av antalet sätt som element i en mängd kan ordnas och på hur många sätt de kan väljas eller kombineras. Studiet av detta kallas för *kombinatorik*.

Multiplikationsprincipen

Anta att du ska klä dig och den synliga delen av din klädsel är skjorta, byxor och skor. Du har 4 rena skjortor, 3 rena byxor och 3 lämpliga par skor.

Du bestämmer dig för att starta med skjortan. Eftersom du har 4 att välja bland kan valet ske på 4 sätt. Dags för byxorna. De kan väljas på 3 sätt. Slutligen skorna som kan väljas på 3 sätt.

Antalet sätt att välja är $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ sätt.

Om du inte är riktigt övertygad ritar du ett träddiagram för att se att du först får 4 grenar (skjortan). För var och en av dessa får du i nästa steg 3 grenar (byxorna) och slutligen 3 grenar (skorna) för var och en av de tidigare 12.

I ovanstående exempel använder vi oss av multiplikationsprincipen för kombinatorik. Enligt denna multipliceras antalet möjligheter i de olika stegen för att ge det totala antalet möjligheter.

EXEMPEL 1

Nummerskyltarna på våra bilar består av först tre bokstäver och sedan tre siffror. Hur många möjliga kombinationer av bilnummer finns det? Du kan utgå från att det används 25 bokstäver och de får förekomma mer än en gång. Sifferdelen får inte innehålla enbart nollor. Du kan däremot bortse från att vissa bokstavskombinationer censureras bort.

LÖSNING

På den första platsen kan 25 olika bokstäver placeras. För var och en av dessa kan 25 bokstäver placeras på andra platsen. Samma gäller tredje.

Bokstäverna kan placeras på 25^3 sätt.
På motsvarande sätt kan siffrorna väljas på $(10^3 - 1)$ sätt = 999 sätt.
Antalet möjliga skyltar blir $25^3 \cdot 999 = 15\,609\,375$.

SVAR: Antalet kombinationer är 15 609 375 st.

1301 Marie har 6 kjolar, 5 blusar och 2 skärp. På hur många sätt kan hon välja att klä sig med dessa kläder?

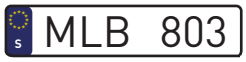
1302 En rad på stryktipset består av 13 matcher. För varje match kan man välja 1, X eller 2. På hur många sätt kan man tippa en rad?

1303 Du ska skapa ett lösenord som inleds med fyra bokstäver (antingen versaler, eller gemener) och avslutas med två siffror. Du får välja på 26 st versaler, 26 st gemener och 10 st siffror. Hur många kombinationer av koder kan du välja på?

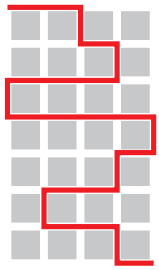
1304 Flera grupper ska redovisa sina projektarbeten. De funderar över på hur många sätt detta kan ske. Redovisningen får ske genom att en person berättar eller två personer samtalar. Bilderna kan visas med hjälp av en ppt-presentation, overheadvisning eller teckningar på tavlan. Utvärderingen av redovisningen kan ske genom en enkät eller genom en diskussion. Utvärderingen är en del av redovisningen. På hur många sätt kan redovisningen ske?

1305 Hur många bokstavskombinationer (med 1 till 4 bokstäver) kan du skapa med brickorna P, O, S och T?

1306 Hur många vanliga svenska registreringsskyltar finns det som innehåller bokstäverna B, L, M och siffrorna 0, 3, 8?



1307 I figuren nedan betecknar varje vit linje en gata i en rektangulär stadsdel. Den röda linjen visar på ett sätt att ta sig från det övre vänstra hörnet (P) till det nedre högra hörnet (Q). På hur många sätt kan man gå från punkten P till punkten Q om man begränsar sig till att aldrig gå norrut (uppåt i figuren)?



1308 Du väljer ett sjusiffrigt tal. Vad är sannolikheten att talet inte innehåller en trea?

Permutationer

Anna, Benny och Camilla går samtidigt in genom dörren på ett postkontor och ska ställa sig i kö vid den enda kassan. På hur många olika sätt kan den kö de ställer sig i se ut?

- En tänkbar köordning är A, B, C (dvs först Anna, sedan Benny och sist Camilla). En annan möjlighet är A, C, B. Nu finns det inte fler alternativ med Anna först.
- Om Benny står först kan du på motsvarande sätt placera de båda övriga på 2 sätt. Möjliga ordningar är B, A, C och B, C, A.
- Slutligen med Camilla först är två köordningar möjliga: C, B, A och C, A, B.

Det finns inte fler möjligheter. Det går alltså att ordna kön på 6 sätt.

Om många element ska ordnas är det orimligt tidskrävande att räkna upp antalet möjliga sätt. Du kan istället resonera så här:

Det finns tre stycken platser i kön. På hur många sätt kan du välja den person som ska stå först? Uppenbarligen är detta antal 3 (A, B eller C). Nu ska du placera den andra personen i kön. Hur många personer finns att välja på? Oavsett vem som valdes på första platsen finns det 2 kvar att välja. För vart och ett av de 3 ursprungliga sätten finns det nu 2 valmöjligheter. Antal olika möjligheter är alltså $3 \cdot 2$. Kvar finns 1 plats men också bara 1 person. Valet av person till den återstående platsen kan alltså ske på 1 sätt.

Totala antalet sätt att ordna de 3 personerna är $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Man kan istället säga att det finns 6 varianter eller *permutationer*.

Du inser förmodligen att detta kan generaliseras.
Fyra personer kan ordnas på $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ olika sätt.

DEFINITION: *n*-fakultet

Allmänt gäller för alla heltal $n > 0$ att antalet sätt att ordna n element är

$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$

Detta tal kallas n-fakultet och skrives $n!$

Av praktiska skäl görs en tilläggsdefinition att $0! = 1$.

EXEMPEL 1

Beräkna a) 5! b) 10!

LÖSNING

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

EXEMPEL 2

På hur många olika sätt kan 10 personer ställa sig i en kö?

LÖSNING

Vi ser personerna som tio element som ska ordnas. Antalet sätt att göra detta är 10!, vilket vi från exemplet ovan vet är 3 628 800 sätt.

I en klass med 15 elever ska väljas en styrelse bestående av 3 personer. De ska ha olika uppdrag, en ordförande, en sekreterare och en kassör. Samma person kan inte ha mer än ett uppdrag.

På hur många sätt kan valet ske om man först väljer ordförande, sedan sekreterare och till sist kassör?

Det första valet kan ske på 15 olika sätt. Sedan detta val skett finns det 14 personer kvar att välja bland. Alltså kan nästa post besättas på 14 olika sätt. Slutligen kan det sista valet ske på 13 olika sätt.

Antalet sätt att välja är alltså $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\,730$.

Man säger att antalet permutationer av 3 element valda bland 15 element är $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\,730$.

Att ordningsföljden är viktig förstår du av det skälet att valet förrättas till en viss post. Vi väljer inte bara ut 3 personer bland 15, utan valet sker för en viss uppgift.

Uttrycket $15 \cdot 14 \cdot 13$ innehåller 3 faktorer då 3 element väljs (bland de 15). I engelskspråkig matematiklitteratur betecknas detta uttryck ofta 15P3 eller mera generellt $n\mathrm{P}r$. Då ska r element väljas bland n i en viss ordning. Skrivsättet kan vara bra att känna till vid användning av digitala hjälpmedel.

Antalet permutationer av r element valda bland n element kan allmänt skrivas

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

Vi ser att för $r = 3$ och $n = 15$ blir $(n - r + 1) = 15 - 3 + 1 = 13$.
Antalet permutationer beräknas alltså som $15 \cdot 14 \cdot 13$.

SATS: Antalet permutationer av *r* element valda bland *n* element är

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

Det går att skriva om uttrycket $15 \cdot 14 \cdot 13$ genom att skriva det som ett bråk och förlänga det med 12!

$$15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = \frac{15!}{12!}$$

SATS: Antalet permutationer av *r* element valda bland *n* element kan skrivas

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

EXEMPEL 3

Ur en kortlek innehållande 52 kort väljs slumpmässigt 5 kort.
På hur många olika sätt kan urvalet se ut om vi förutsätter att det dragna kortet

a) inte stoppas tillbaka och vi tar hänsyn till i vilken ordning korten dras?

b) stoppas tillbaka innan nästa dras?

LÖSNING

a) Antalet sätt att välja de 5 korten är $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 =$
$= 311\,875\,200$
(Alternativ beräkning: $\frac{52!}{47!} = 311\,785\,200$)

b) Om alla kort är valbara hela tiden så är antalet möjligheter
$52^5 = 380\,204\,032$

EXEMPEL 4

Välj nu istället slumpmässigt 13 kort av kortlekens 52 kort.

a) På hur många olika sätt kan detta göras om vi tar hänsyn till ordningen?

b) Hur stor är sannolikheten att du drar korten i ordningen 2, 3, 4, …, knekt, dam, kung, ess i en och samma färg?

LÖSNING

a) Antalet permutationer av 13 element valda bland 52 element är

$$\frac{52!}{(52-13)!} = \frac{52!}{39!} \approx 3{,}95 \cdot 10^{21}$$

b) Utfallsrummet utgörs av alla permutationer i a). De gynnsamma utfallen är fyra (en för varje färg). Sannolikheten blir alltså

$$\frac{4}{52!/\,39!} \approx 1{,}01 \cdot 10^{-21}$$

1309 Beräkna

a) $7!$ b) $\frac{7!}{3!}$

c) $\frac{12!}{9!}$ d) $\frac{250!}{247!}$

1310 På hur många sätt kan du ordna bokstäverna 1, 2, 3, 4, 5 och 6?

1311 För vilka $n \in \mathbb{N}$ är $n! > 1\,000\,000$?

1312 Stämmer det att $\frac{8!}{4!} = \left(\frac{8}{4}\right)!$?

1313 Skriv ett uttryck för antal sätt du kan ordna 52 kort.

1314 Beräkna

a) $\frac{8!}{(8-3)!}$ b) $\frac{12!}{(12-1)!}$

c) $\frac{5!}{(5-4)!}$ d) $\frac{4!}{(4-2)!2!}$

1315 Beräkna på hur många sätt man i ordning kan välja ut 9 element bland 15.

1316 På hur många sätt kan man bilda en kö av fyra personer?

1317 På hur många sätt kan man bilda en kö av fyra personer ur en grupp på 10 personer?

1318 På en julfest har man 10 julklappar, som ska delas ut så att 8 personer ska få var sin julklapp. De återstående 2 bevaras till ett annat tillfälle. Hur många varianter på julklappsutdelningen finns det?

1319 Tränaren för svenska stafettlandslaget i skidor skall välja ut ett lag med fyra personer. Han har 6 åkare att välja på.

a) På hur många sätt kan han sätta ihop stafettlaget om hänsyn tas till vem som kör de olika sträckorna?

b) Vi tänker oss nu att tränaren har bestämt sig för vilka 4 som skall åka. Hur många möjliga laguppställningar finns det?

1320 Jämför $n!$ med 2^n. För vilket eller vilka värden på n är $n!$ större än 2^n? Kontrollera för $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

1321 Varför är alla $n!$ delbart med 10 för $n > 4$?

1322 Vad av följande är sant för alla n?

a) $(n!)! = (n!)^2$

b) $n!\,(n + 1) = (n + 1)!$

c) $n! = (n + 1)! - (n + 1)$

1323 Hur många delmängder med två element finns av mängden $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$? Observera att elementen i mängder inte är ordnade. Man skiljer med andra ord inte på mängderna $\{1, 2\}$ och $\{2, 1\}$.

1324 Till din bil finns det fyra sommardäck och fyra vinterdäck. Du skall byta till vinterdäck och placerar dem på slumpmässigt valda platser. Hur stor är sannolikheten att vinterdäcken hamnar på samma plats som förra året?

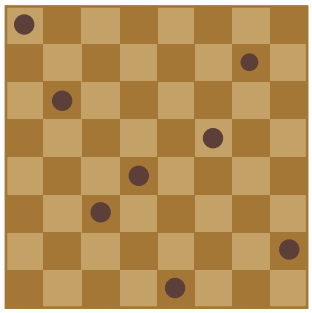
1325 Nedan ser du tre uträkningar. Formulera ett kombinatoriskt problem till varje uträkning.

A: $6! = 720$

B: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

C: $6^3 = 216$

1326 På schackbrädet är åtta bönder utplacerade så att det inte står två bönder i samma rad, varken lodrätt eller vågrätt. På hur många sätt kan man välja ut de åtta rutor som bönderna skall ställas på?



1327 Hur många ord (behöver ej vara ”riktiga ord”) kan du bilda av bokstäverna M, A, T, T, E?

1328 Kan man vid beräkning av antal permutationer av fem element valda bland fem element använda uttrycket $\dfrac{n!}{(n-r)!}$?

Kombinationer

Nu är det dags att på nytt studera klassen med 15 elever ur vilken 3 stycken ska väljas. Men nu är det inte längre viktigt i vilken ordning valet sker. Det är bara av intresse att se vilka tre personer som är utvalda.

För att underlätta förståelsen studeras först ett enklare fall där alla möjligheterna kan räknas upp. Av de 4 elementen A, B, C och D ska 3 väljas ut. På hur många sätt kan det ske om vi bortser från ordningsföljden vid urvalet?

Det finns totalt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ permutationer av de 3 elementen som väljs bland 4, nämligen:

ABC	**ACB**	**BAC**	**BCA**	**CAB**	**CBA**
ABD	**ADB**	**BAD**	**BDA**	**DAB**	**DBA**
ACD	**ADC**	**CAD**	**CDA**	**DAC**	**DCA**
BCD	**BDC**	**CBD**	**CDB**	**DBC**	**DCB**

Men som du ser är de som står på samma rad identiska om ordningsföljden är oviktig. På första raden står bokstäverna A, B och C, på andra A, B och D, tredje A, C och D och den sista B, C och D.

Det finns tydligen 4 olika möjligheter.

Om du studerar en enskild rad, vilken som helst, så ser du att på den finns de 6 permutationerna av de 3 elementen. Tre element kan ordnas på $3! = 6$ olika sätt.

Antalet möjligheter reduceras med andra ord med en faktor 6 eller annorlunda uttryckt med det antal sätt som de tre elementen kan ordnas.

Beräkningen kan skrivas $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$.

Dags att återvända till klassen med 15 elever. Oberoende av ordning kan 3 elever väljas på

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{3! \cdot 12!} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = 455 \text{ sätt.}$$

Man säger att det finns 455 *kombinationer* då man bland 15 element väljer ut 3.

Det finns en beteckning för detta. Den är $\binom{15}{3}$ och utläses ”15 över 3”.

Vi inför beteckningen $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ för $r = 0, 1, \ldots, n$.

SATS: Antalet kombinationer av *r* element valda bland *n* element är

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

I engelskspråkig matematiklitteratur benämnes detta med *n*C*r* (C för *Combinations*). Så betecknas det ofta också på räknaren och andra digitala hjälpmedel.

EXEMPEL 1

Beräkna $\binom{7}{4}$ utan räknare.

LÖSNING

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35$$

EXEMPEL 2

Viktor och Anton äter vingummi. Efter det att Viktor tagit en handfull finns det kvar 12 röda, 7 gröna och 9 gula godisbitar. Anton bestämmer sig för att ta 5 stycken.

a) På hur många sätt kan dessa 5 väljas?

b) På hur många sätt kan valet ske så att Anton får 3 röda och 2 gröna?

c) Hur stor är sannolikheten att Anton får 3 röda och 2 gröna godisbitar?

LÖSNING

Alla val är oberoende av ordning eftersom det bara är vilka fem som valts som är av intresse.

a) Totalt finns 12 + 7 + 9 = 28 bitar.

Antalet sätt att välja 5 är $\binom{28}{5} = 98\,280$

b) Att välja 3 röda bland 12 kan ske på $\binom{12}{3}$ sätt. För vart och ett av dessa sätt finns det $\binom{7}{2}$ sätt att välja 2 gröna bland 7.

Enligt multiplikationsprincipen finns det $\binom{12}{3} \cdot \binom{7}{2} = 4\,620$ sätt att välja 3 röda och 2 gröna bitar.

c) Antalet sätt att välja 5 bitar godis bland totalt 28 är $\binom{28}{5} = 98\,280$.

Att välja 3 röda och 2 gröna kan ske på

$\binom{12}{3} \cdot \binom{7}{2} = 220 \cdot 21 = 4\,620$ sätt.

Sannolikheten att välja detta är $\dfrac{\binom{12}{3} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{28}{5}} = \dfrac{4\,620}{98\,280} \approx 0{,}047 = 4{,}7\ \%$

EXEMPEL 3

I en skål ligger 10 kulor märkta med siffrorna 0 till 9. Du plockar slumpmässigt upp 3 kulor. Hur stor är sannolikheten att du plockar upp

a) kulorna 1, 2 och 5 i denna ordning?

b) kulorna 1, 2 och 5, utan att ordningen spelar någon roll?

LÖSNING

a) Du kan plocka kulorna på $10 \cdot 9 \cdot 8$ sätt. Sannolikheten blir

$\dfrac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \dfrac{1}{720} \approx 0{,}14\ \%$

b) Tre kulor kan väljas ut ur 10 på $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ sätt.

Sannolikheten blir $\dfrac{1}{120} \approx 0{,}83\ \%$.

1329 Beräkna utan räknare

a) $\binom{6}{3}$ b) $\binom{10}{2}$ c) $\binom{10}{8}$

1330 Beräkna (gärna med räknare)

a) $\binom{16}{3}$ b) $\binom{15}{4}$ c) $\binom{15}{11}$

1331 Beräkna på hur många sätt man kan välja ut 9 element bland 15 om ordningen är oviktig.

1332 Tre klassrepresentanter ska väljas ur en klass med 28 elever. På hur många sätt kan detta ske

a) om ordningen inte är viktig?

b) om ordningen är viktig?

1333 Vad ska h vara om h inte är 3, men

a) $\binom{12}{3}=\binom{12}{h}$ b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{h}$

1334 Beräkna utan räknare

a) $\binom{100}{2}$ b) $\binom{10}{6}$

1335 På hur många sätt kan man, utan att ta hänsyn till ordningen, välja ut 10 personer ur en grupp på 10 personer?
Hur motiverar detta att $0! = 1$?

1336 Sven-Göran är tränare för ett fotbollslag med 11 spelare och skall välja ut 3 spelare som skall spela i landslaget. Han vill räkna ut på hur många sätt detta kan ske och frågar sin assistent Tord som resonerar på följande sätt.

”Första spelaren kan vi välja på 11 sätt, andra på 10 sätt och tredje på 9 sätt. Det blir alltså $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ *möjligheter”*

Resonerar Tord rätt? Motivera!

1337 Hur stor är sannolikheten att ur en kortlek med 52 kort välja ut

a) två ess?

b) två hjärter?

1338 I en kulpåse finns 8 röda, 7 blå och 10 gula kulor. Hur stor är sannolikheten att få

a) en kula av varje färg om man tar 3 kulor?

b) ingen blå kula om man tar 4 kulor?

1339 I en klass finns 12 flickor och 18 pojkar. Om man slumpvis väljer fem elever, hur stor är sannolikheten att alla är flickor?

1340 På en plantskola finns fem olika sorters äppelträd, 100 st av varje slag. Vad är sannolikheten att jag får samma äppelsort om jag tar slumpvis fem träd?

1341 Hur många delmängder med 2 element har mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

1342 På hur många sätt kan en stryktipsrad se ut om den skall bestå av 5 ettor, 3 kryss och 5 tvåor?

1343 Snickaren Felicia har fått ett jobb där hon skall lägga ut 15 klinkerplattor i ett badrum. Plattorna skall ligga i 3 rader med 5 plattor i varje rad. Hon har tillgång till ett lager där ett stort antal plattor, jämnt fördelat på tre olika färger, ligger huller om buller.

Kunden vill att det skall finnas exakt 5 plattor av varje färg i badrummet.

Hur stor är sannolikheten att det blir så om hon helt slumpmässigt väljer 15 plattor ur lagret?

Binomialsatsen

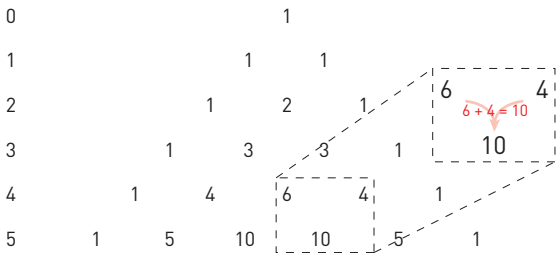
Kombinatorik kan faktiskt också vara användbart när man sysslar med *binom*. Binom är uttryck på formen $(a + b)^n$ för olika positiva heltal n.

Enligt kvadreringregeln gäller att $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$. Koefficienterna i det utvecklade binomet är 1, 2 och 1.

Om du utvecklar $(a + b)^3$ får du $(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^3 + b^3$. Koefficienterna i det utvecklade binomet är alltså 1, 3, 3 och 1.

Kanske minns du att man kan använda Pascals triangel (nedan) för att få fram binomialkoefficienterna?

Observera mönstret som gör det lätt att få fram en ny rad utifrån föregående.



I rad 2 hittar du koefficienter för $(a + b)^2$ och i rad 3 koefficienterna för $(a + b)^3$. Med hjälp av Pascals triangel kan vi snabbt utveckla $(a + b)^4$:

$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Kontrollera gärna genom att utföra parentesmultiplikation.

Har detta någonting med kombinatorik att göra? Det verkar så. Titta på $(a + b)^2$. Koefficienterna i det utvecklade binomet är 1, 2 och 1, dvs talen

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = 1, \binom{2}{1} = 2 \text{ och } \binom{2}{2} = 1.$$

Koefficienterna till utvecklingen av $(a + b)^3$ är

$$\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{0} = 3, \binom{3}{0} = 3 \text{ och } \binom{3}{0} = 1$$

Och för $(a + b)^4$

$$\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{0} = 4, \binom{4}{0} = 6 \ldots$$

Pascals triangel kan alltså även se ut på detta sätt:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Vi ska försöka förstå detta sammanträffande genom att med ett kombinatoriskt resonemang utveckla

$(a + b)^4 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$.

De termer som uppstår är a^4, $a^3 \cdot b$, $a^2 \cdot b^2$, $a \cdot b^3$ och b^4.
I ab^3-termen samlas multiplikationer med 3 st b valda ur 4 parenteser.

Detta kan göras på $\binom{4}{3} = 4$ sätt. Koefficienten blir alltså 4.

a^4 kan erhållas på bara 1 sätt, 0 st b ska väljas i parenteserna, $\binom{4}{0} = 1$.

$a^3 \cdot b$ kan erhållas på $\binom{4}{1} = 4$ sätt, $a^2 \cdot b^2$ på $\binom{4}{2} = 6$ sätt
och b^4 på $\binom{4}{0} = 1$ sätt.

Resonemangen kan föras för alla potenser av binom, där potensen är ett positivt heltal.

SATS: Binomialsatsen

$(a + b)^n =$

$$= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

EXEMPEL 1

Bestäm de första termerna vid utvecklingen av $(a + b)^5$.

LÖSNING

De tre första termerna innehåller a^5, a^4b och a^3b^2.

Koefficienten till a^5-termen är $\binom{5}{0} = 1$

Koefficienten till a^4b-termen: $\binom{5}{0} = 5$

Koefficienten till a^4b-termen: $\binom{5}{0} = 10$

SVAR: De tre första termerna är $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2$

EXEMPEL 2

Bestäm koefficienten till x^9y^6-termen i utvecklingen av $(x + y)^{15}$.

LÖSNING

Enligt binomialsatsen är denna term $\binom{15}{6} x^9 y^6$.

Detta kan tolkas som att vi väljer ut 6 st y bland 15 parenteser.

Koefficienten blir $\binom{15}{6} = 5\,005$.

1344 Femte raden i Pascals triangel är

1 5 10 10 5 1

Skriv nästa rad.

1345 Ange de tre första termerna i utvecklingen av $(a + b)^7$.

1346 Bestäm koefficienten till x^3y^9-termen i utvecklingen av $(x + y)^{12}$.

1347 Utveckla med binomialsatsen

a) $(1 + x)^3$ b) $(1 + x)^5$

1348 Utveckla $(2x + 3y)^3$ med binomialsatsen.

1349 Utveckla

a) $(a - b)^4$ b) $(p - 2q)^3$

LEDNING: Skriv om som $(a + (-b))^4$ först.

1350 Ge en kombinatorisk förklaring till sambandet $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ t ex $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$ eller $\binom{13}{10} = \binom{13}{3}$.

1351 Använd sambandet i förra uppgiften för att utan räknare beräkna

a) $\binom{16}{14}$ b) $\binom{14}{12}$ c) $\binom{100}{99}$

1352 Visa att $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$. Vad har det att göra med Pascals tringel?

1353 Vilken koefficient har x^{10}-termen i utvecklingen av $(2x + 5x^3)^8$?

1354 Bestäm den term som inte innehåller något x vid utvecklingen av $\left(5x^2 - \frac{2}{x}\right)^9$.

1355 Om du summerar talen i fjärde raden ($n = 4$) i Pascals triangel får du $1 + 3 + 3 + 1 = 8$.
Ställ upp ett uttryck för summan i rad n.

1356 Skriv med hälp av binomialsatsen $(2 + i)^6$ på formen $a + bi$.

1357 Visa att $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Binomialfördelning

Vi kan även använda ett kombinatoriskt resonemang på problem som vi tidigare löst med träddiagram.

EXEMPEL

Bestäm sannolikheten att vid tre kast med ett skevt mynt få

a) klave vid exakt ett kast

b) få högst två klave.

Det skeva myntet ger klave med 60 % sannolikhet.

LÖSNING

a) Att välja ut 1 kast bland 3 som ska ge klave kan ske på $\binom{3}{1}$ sätt.

Sannolikheten för ett av dessa val är $0{,}6^1 \cdot 0{,}4^2$. Sannolikheten för klave vid ett kast är

$$\binom{3}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}288 = 28{,}8\ \%.$$

b) Högst två klave har komplementhändelsen tre klave. Tre klave kan väljas på ett enda sätt eller $\binom{3}{3}$ sätt. Sannolikheten för tre klave är $\binom{3}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}216$. Sannolikheten för högst 2 klave är $1 - 0{,}216 = 0{,}784 = 78{,}4\ \%$.

Att ett försök är *binomialfördelat* innebär att det finns två möjligheter, ”lyckade” och ”misslyckade”. Sannolikheten för att försöket lyckas betecknas med p. Då är sannolikheten för att försöket misslyckas $(1 - p)$.

SATS: Binomialfördelning

Om försöket upprepas n gånger är sannolikheten för att det ska lyckas r gånger

$$\binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

1358 I ett sannolikhetsförsök kastas tre symmetriska tärningar. Hur stor är sannolikheten att

a) alla tre tärningarna visar 6?

b) ingen av tärningarna visar 6?

c) minst en av tärningarna visar 6?

d) en av tärningarna visar 6?

1359 En skytt träffar mitt i prick med sannolikheten 0,85. Han skjuter tre skott i följd. Hur stor är sannolikheten att

a) alla tre skotten träffar mitt i prick?

b) exakt två av skotten träffar mitt i prick?

c) minst ett av skotten träffar mitt i prick?

1360 Persikoträd anses ha 90 % chans att överleva vintern i Skåne. Fru Jakobsson planterar fem persikoträd. Hur stor är sannolikheten att

a) tre träd överlever?

b) minst fyra träd överlever?

1361 Hur stor är sannolikheten att få

a) exakt tre ettor vid 10 kast med tärning?

b) högst tre ettor vid 10 kast med tärning?

c) åtminstone en etta vid 10 kast med tärning?

1362 På ett prov finns 10 frågor med tre svarsalternativ. Filip, som inte har pluggat till provet, chansar på samtliga tio frågor. Läraren presenterar följande betygsgränser:

F: 0–3p

E: 4–5 p

C: 6–8 p

A: 9–10p

a) Hur stor är chansen att Filip har precis 4 rätt?

b) Hur stor är chansen att Filip får ett E?

c) Hur stor är chansen att Filip får ett A?

1363 Beräkna

$$\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+$$

$$+\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1+\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

och ge en kombinatorisk förklaring till resultatet.

1364 En enkrona kastas 8 gånger.

a) Visa att sannolikheten att få klave k gånger är $\binom{8}{k}0{,}5^8$.

b) Beräkna sannolikheten att få klave 5 gånger.

1365 a) Formulera ett problem som kan lösas med beräkningen

$$\frac{100!}{50!\cdot 50!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$$

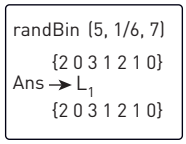
b) Visa att

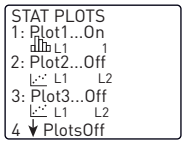
$$\frac{100!}{50!\cdot 50!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{50}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}$$

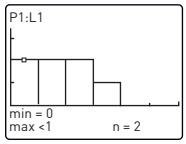
DIGITALA RUTAN Spela Yatzy

På de flesta räknare finns en funktion för att simulera binomialfördelning. Den heter ofta randbin.

Nedan ser vi hur en simulering av tärningskast kan se ut.
Vi tänker oss att vi kastar 5 tärningar. Sannolikheten för sexa är 1 / 6 och försöket upprepas 7 ggr. Räknaren returnerar antalet sexor i varje försök. Vi lägger talen i en lista och ritar ett histogram.
Där syns fördelningen tydligt.







Histogrammet ger oss:

Andel som gav noll sexor: 2 / 7 ≈ 0,29

Andel som gav en sexa: 2 / 7 ≈ 0,29

Andel som gav två sexor: 2 / 7 ≈ 0,29

Andel som gav tre sexor: 1 / 7 ≈ 0,14

I tabellen är denna simulering införd.

Antal sexor i 5 kast	Teoretiskt beräknad sannolikhet	$n = 7$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1\,000$
0		0,29					
1		0,29					
2		0,29					
3		0,14					
4		0					
5		0					

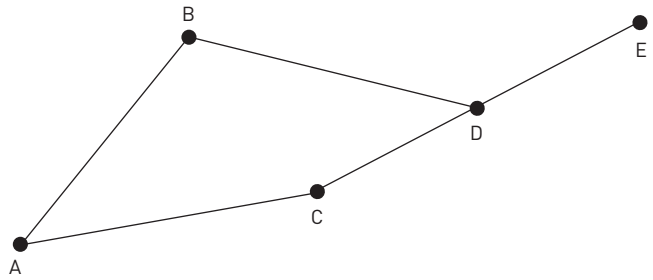
- Gör nu motsvarande försök för ett större värde på antalet försök n och fyll i tabellen.
- Beräkna teoretiskt sannolikheterna och för in i tabellen.
- Jämför de teoretiskt beräknade värdena med de simulerade. Diskutera resultatet.

1.4 GRAFTEORI

Inledande exempel

Figuren nedan visar fem orter *A*, *B*, *C*, *D* och *E* och vägförbindelserna mellan dessa orter. Vi ser t ex att det går en väg från *A* till *B* men om man vill färdas från *A* till *D* måste man åka över *B* eller *C*.

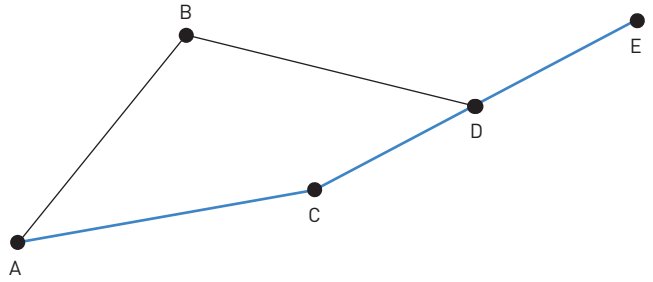
Om man vill färdas från *A* till *E* måste man åka över *D*.



Istället för vägförbindelser kan figuren t ex illustrera tågförbindelser eller ett system av ledningar mellan orterna.

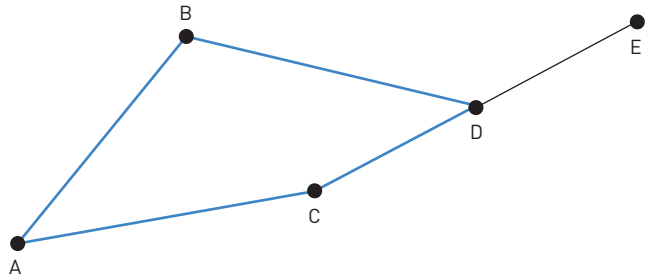
Figuren visar en *graf* med fem *noder* *A*, *B*, *C*, *D* och *E* och fem *kanter* *AB*, *AC*, *BD*, *CD* och *DE*.

Figuren nedan visar en *väg* från startpunkten *A* till slutpunkten *E*. Vägen går först från *A* till *C*, sedan från *C* till *D* och till sist från *D* till *E*.



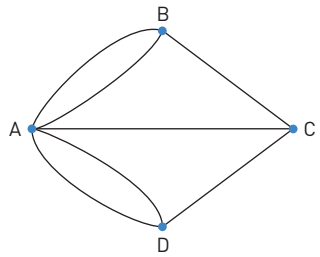
Väg ACDE från A till E

Figuren nedan visar en *cykel*. Den går från *A* till *C*, från *C* till *D*, från *D* till *B* och till sist från *B* tillbaka till *A*. I en cykel är slutpunkten lika med startpunkten.



Cykel ACDBA

Figuren nedan visar en graf med 4 noder, *A*, *B*, *C* och *D* och 7 kanter. Observera att det i denna graf finns 2 kanter mellan *A* och *B* och mellan *A* och *D*.



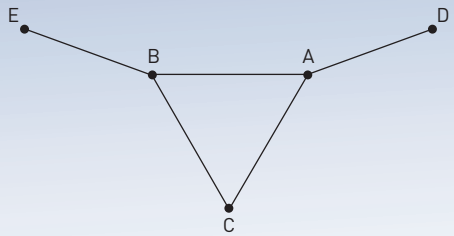
Vi ser att i grafen ovan så utgår tre kanter från exempelvis nod C och fem kanter från nod A. Vi säger att nod C har *graden* 3 och nod A graden 5.

DEFINITION: Graden hos en nod

Graden hos en nod är lika med antalet kanter som utgår från noden.

EXEMPEL

a) Hur många kanter respektive noder har följande graf?



b) Ange graden hos nod B.

c) Ange en cykel i grafen.

LÖSNING

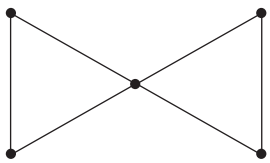
a) Grafen har fem noder och fem kanter.

b) Graden hos nod B är 3.

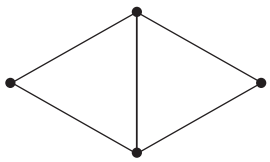
c) T ex BCAB

1401 Hur många noder respektive kanter har följande grafer?

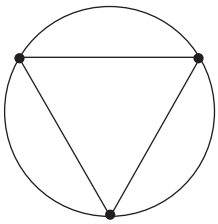
a)



b)



c)



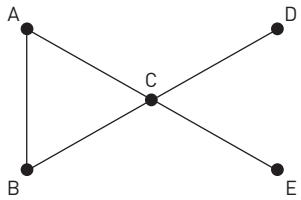
1402 Rita en graf med

a) tre noder och tre kanter.

b) fyra noder och tre kanter.

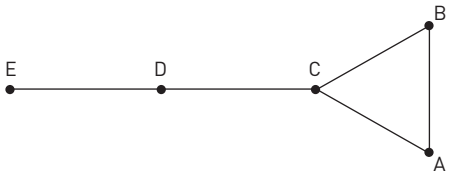
c) fem noder och sex kanter.

1403 Ange graden för respektive nod i grafen.

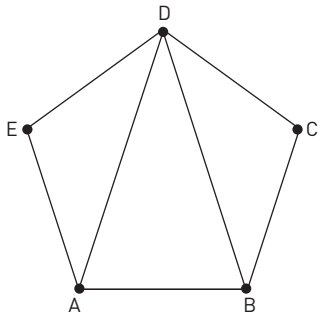


1404 Markera en cykel i följande grafer:

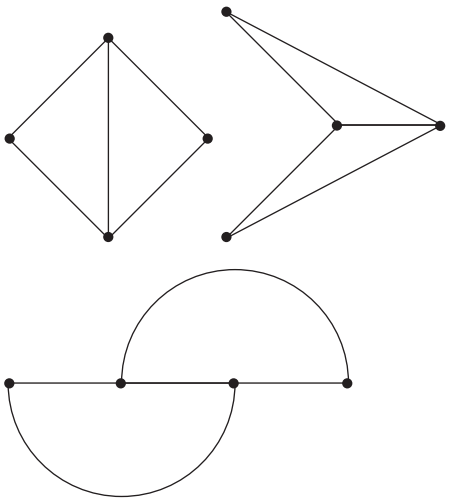
a)



b)

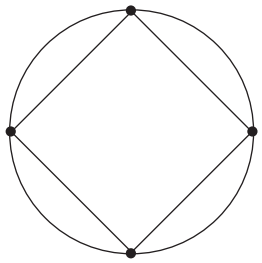


1405 På vilket sätt är följande grafer lika?

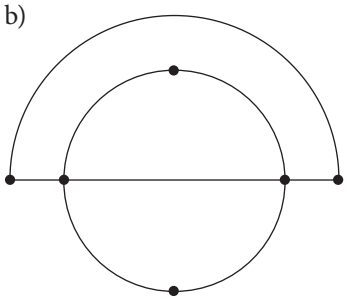


1406 Kan du hitta en cykel i respektive graf som innehåller alla kanter precis en gång?

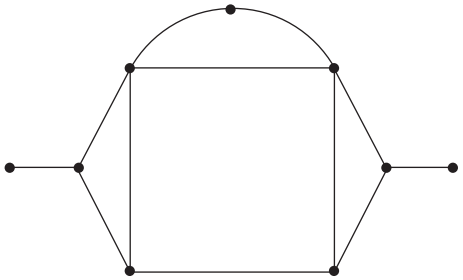
a)



b)

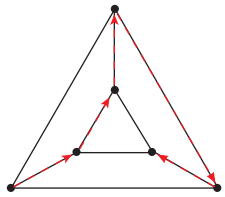


1407 Kan du hitta en väg som passerar varje nod i grafen nedan precis en gång?

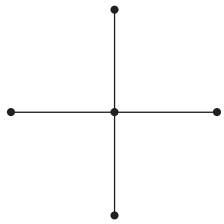


Eulervägar och Hamiltonvägar

I grafen till höger är en väg markerad. Det speciella med vägen är att den passerar alla grafens noder exakt en gång. En sådan väg kallas för en *Hamiltonväg*, efter den irländske astronomen och matematikern William Rowan Hamilton (1805–1865).

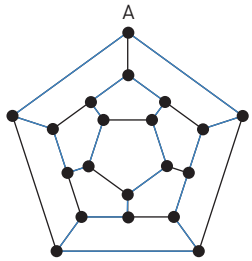


Det är inte alla grafer som har en Hamiltonväg. Du kan till exempel inte hitta en Hamiltonväg till följande graf.



DEFINITION: Hamiltonväg

En Hamiltonväg
- passerar (går genom) *varje nod* i grafen
- passerar inte någon nod mer än en gång.

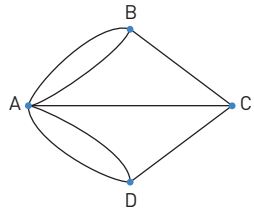


Figuren till höger visar en graf med 20 noder och 30 kanter. Den markerade vägen startar i nod A, passerar gradens alla noder och slutar i nod A. Vägen är alltså en *Hamiltoncykel*.

Hamilton presenterade sitt problem som ett spel som han sålde till en leksakstillverkare. Spelet tillverkades i trä och de 20 hörnen fick namn efter kända städer och kanterna i grafen representerade förbindelser mellan städerna. Spelets syfte var att använda förbindelserna mellan städerna till att besöka varje stad exakt en gång på en resa som börjar och slutar i samma stad.

I Königsberg (numera Kaliningrad) fanns sju broar som förband två öar med varandra och fastlandet. Leonhard Euler (1707-1783) frågade sig ifall det går att göra en promenad så att man passerar varje bro exakt en gång? Promenaden ska starta och sluta på samma plats.

Vi kan göra en matematisk modell av problemet i form av en graf där hörnen *A*, *B*, *C* och *D* motsvarar öar och fastland i den övre figuren. Kanterna som sammanbinder hörnen i grafen motsvarar Königsbergs sju broar.



Eulers problem kan formuleras så här.
Kan man hitta en cykel i grafen som passerar varje kant endast en gång. En sådan cykel kallar vi för en *Eulercykel*. Om vi tar bort kravet på att vägen ska starta och sluta i samma nod, har vi en *Eulerväg*.

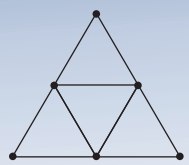
DEFINITION: Eulerväg

En Eulerväg
- passerar varje kant i grafen
- passerar inte någon kant mer än en gång.

Euler visade att det inte finns någon Eulercykel i den graf som svarar mot problemet med Königsbergs broar. Enkelt uttryckt kan man säga att han visade att det inte går att rita grafen utan att lyfta pennan, om man vill rita alla kanter exakt en gång och börja och sluta i samma hörn. Detta löser problemet med Königsbergs broar.

EXEMPEL

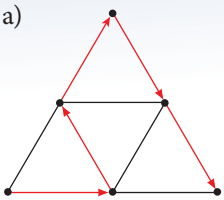
Studera följande graf.



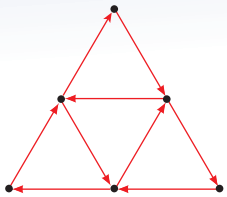
a) Markera en Hamiltonväg. b) Markera en Eulercykel.

LÖSNING

a)

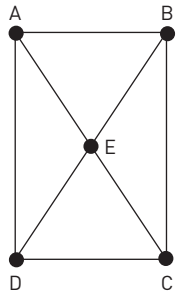


b)

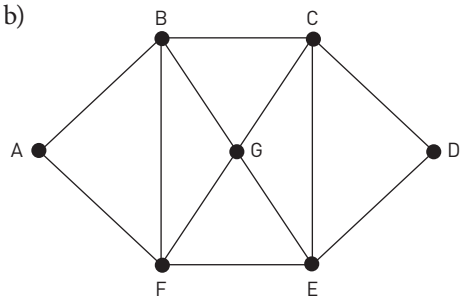


1408 Finn en Hamiltoncykel i grafen

a)

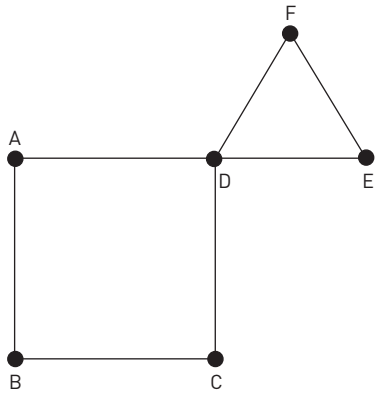


b)

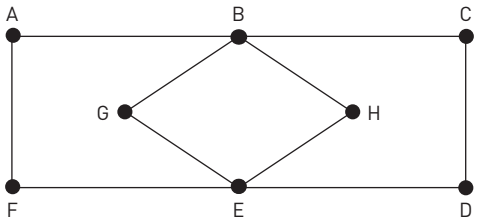


1409 Finn en Eulercykel i grafen

a)

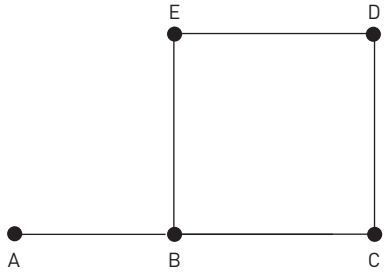


b)



1410 Se grafen nedan.

Har den en



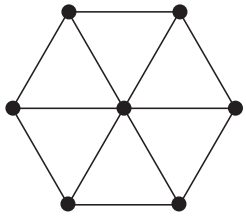
a) Hamiltoncykel?

b) Eulercykel?

c) Eulerväg?

1411 Ett *träd* är en graf där alla noder är sammanbundna, men som inte innehåller någon cykel. En nod i trädet kallas *löv* om noden har graden 1.

a) Ta bort kanter i grafen så att den blir till ett träd.



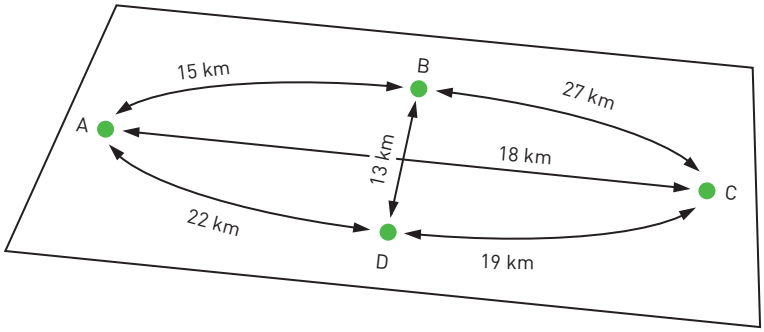
b) Hur många löv har ditt träd? Kan du få till träd med 2, 3, 4, 5 respektive 6 löv?

c) Vilka av graferna i b innehåller en Hamiltonväg?

1412 Cecilia påstår att det endast går att hitta en Eulercykel till en graf ifall alla noder i grafen har en jämn grad. Verkar det stämma?

AKTIVITET Den handelsresandes problem

Här kommer ett välkänt problem inom grafteorin!
En handelsresande ska besöka ett visst antal städer.
Vi antar att den handelsresande bor i *A* och ska besöka städerna *B*, *C* och *D* och slutligen ska tillbaka till A.



- Hur många olika färdvägar är möjliga för den handelsresande?
- Hur många olika färdvägar är möjliga för den handelsresande om man bortser från färdriktningen?

Ett sätt att ta reda på den väg som är kortast är *närmaste granne metoden*. Den innebär att man alltid reser till den stad som är närmast av de städer man ännu ej besökt. (Det är dock inte helt säkert att detta ger den kortaste resvägen)

- Vilken är den kortaste resvägen och hur lång är den?
- Vilken är den längsta resvägen och hur lång är den?

SAMMANFATTNING

Mängder

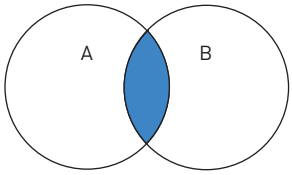
Mängden A av alla udda positiva heltal kan utryckas som $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$, eller $A = \{x : x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$

$x \in A$ betyder att x är ett element i mängden A

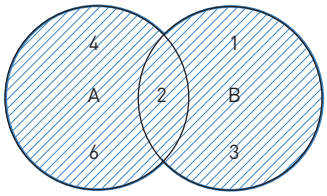
$B \subset A$ betyder att B är en delmängd av mängden A

Venndiagram och mängdoperationer

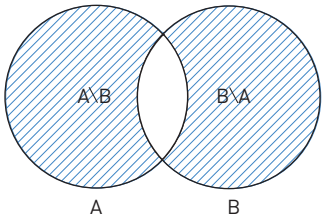
Snittet av mängderna A och B: $A \cap B$



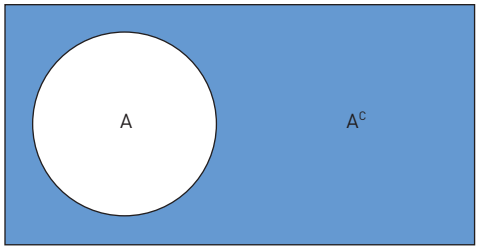
Unionen av mängderna A och B: $A \cup B$



Differensen av mängderna A och B: A / B



Komplementet till mängden A: A^C



Fakultet

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 1$

Permutation

Att plocka ut och arrangera r element ur n element kan göras på $\frac{n!}{(n-r)!}$ sätt.

Kombination

Att plocka ut r element ur n element kan göras på $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ sätt.

Binomialsatsen

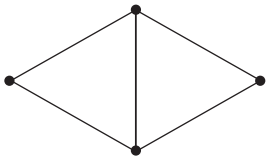
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

Binomialfördelning

Om försöket upprepas n gånger är sannolikheten för att det ska lyckas r gånger $\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$.

Grafer

En graf består av noder och kanter.



En cykel som passerar varje kant en, och endast en gång, kallas Hamiltoncykel.

En cykel som passerar varje nod en, och endast en gång, kallas Eulercykel.

TEST 1

1 Vilka av följande påståenden är sanna?

a) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

b) $5 + 3i \in \mathbb{R}$

c) $1 \in \mathbb{C}$

d) $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$

2 För de fyra mängderna A, B, C och D gäller:

- $C \subset (A \cap B)$
- $D \subset B$
- A och D är disjunkta.

Rita venndiagram som illustrerar mängderna.

3 För de fyra sista siffrorna i personnumret gäller att de två första väljs slumpmässigt. Den tredje siffran väljs slumpmässigt bland jämna siffror för kvinnor och udda siffror för män. Den fjärde siffran är en kontrollsiffra, som bestäms av övriga siffror i personnumret.

Hur många olika personnummer är möjliga för en kvinna född den 26 mars 2013?

4 På hur många olika sätt kan du arrangera 5 olika bokstäver?

5 På hur många olika sätt kan du arrangera 4 personer ur en grupp på 6 personer?

6 a) Beräkna $\binom{12}{5}$ utan räknare.

b) Formulera ett problem där beräkningen ovan ger lösningen.

7 I en skål ligger 5 kulor märkta med siffrorna 1–5. Du plockar slumpmässigt ut 3 kulor (utan återläggning).
Vad är sannolikheten att du plockar kulorna märkta med 1, 2, 3

a) precis i den ordningen?

b) om ordningen är oviktig?

8 Givet är de två mängderna A och B där $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ och $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14\}$.

Bestäm

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

c) $|A \cup B|$

9 Du singlar mynt med tre enkronor. Vilken/vilka av beräkningarna nedan ger sannolikheten för att exakt två av mynten visar klave?

a) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

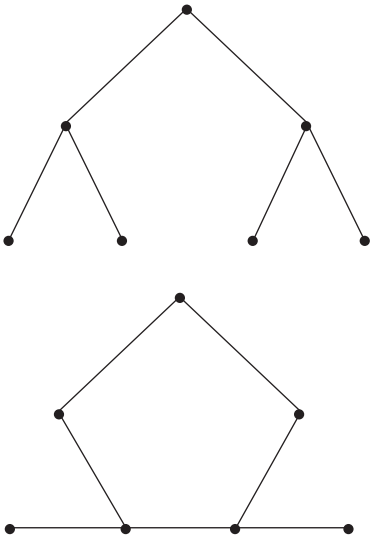
b) $\binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

d) $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$

10 Bestäm koefficienten för x^{14}-termen i utvecklingen av $\left(x^2 + 2x^3\right)^6$.

11 Figuren visar två grafer.
Vilka av påståendena är sanna?



a) Båda graferna har 7 noder.

b) Båda graferna innehåller två noder med graden 3.

c) Ingen av graferna innehåller en Eulerväg.

d) Ingen av graferna innehåller en Hamiltonväg.

12 Vilka av talen nedan är element i $A \cap B$, där
$A = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ och $B = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$?

a) 16

b) 81

c) 4 096

d) 10 000

13 Bland 1 000 gymnasieelever som skrivit de nationella proven i Matematik 2 (Ma2), Matematik 3 (Ma3) och Matematik 4 (Ma4) klarade (med minst provbetyget E) 916 provet i Ma2. 830 klarade provet i Ma3 och 802 provet Ma4. Dessutom klarade 765 av eleverna proven i både Ma2 och Ma3, 747 i både Ma2 och Ma4 och 736 i både Ma3 och Ma4. 686 av eleverna klarade samtliga prov.

Hur många av de 1 000 eleverna klarade inte något av proven?

14 Vanliga svenska registreringsskyltar består av tre bokstäver följt av tre siffror. Det finns 23 bokstäver och 10 siffror att välja mellan. Ingen registreringsskylt har sifferkombinationen 000.

Hur många möjliga registreringsnummer finns det?

15 På hur många sätt kan du ordna de 28 bokstäverna i alfabetet?

16 På hur många sätt kan du ordna 5 av de 28 bokstäverna i alfabetet?

17 I Lotto gäller det att pricka in 7 nummer av 35, utan inbördes ordning. Hur stor är sannolikheten att pricka in alla 7 nummer?

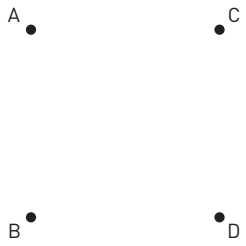
18 Beräkna med hjälp av din räknare

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}}$$

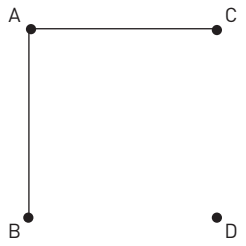
19 Ange x^{10}-termen i utvecklingen av $(1 + x^2)^{25}$.

20 Det är vinst på var femte trisslott. Hur stor är sannolikheten att du vinner på exakt tre trisslotter om du köper 10 stycken?

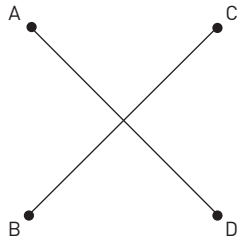
21 I figuren ser du tre olika grafer, alla med 4 noder. Graf 1 har ingen kant, medan graf 2 och 3 har 2 kanter vardera.



Graf 1



Graf 2



Graf 3

Hur många olika grafer kan skapas utifrån noderna A, B, C och D?

BLANDADE UPPGIFTER

1 Skriv följande mängder på listform:

a) mängden av alla positiva heltalsfaktorer till talet 12.

b) mängden av positiva heltal vars kvadrater är mindre än 10.

c) $\{x\text{: } x \text{ är ett jämnt tal och } 0 < x < 3\}$

d) mängden av primtal som ligger i intervallet $20 < x < 40$.

2 Vilka av följande utsagor är sanna?

a) $5 \in \{25\}$

b) $5 \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$

c) $14 \in \{\text{tal delbara med } 3\}$

d) $0 \subset \varnothing$

3 Du har en påse med kulor, fem röda, sju blåa och fyra gula. Du tar en kula ur påsen. Hur stor är sannolikheten att

a) kulan är blå?

b) att kulan är röd eller gul?

4 Illustrera följande mängder i venndiagram

a) $A = \{\text{människor}\}$
$B = \{\text{kvinnor}\}$
$C = \{\text{svenskar}\}$

b) $A = \{\text{heltal}\}$
$B = \{\text{jämna heltal}\}$
$C = \{\text{heltal delbara med } 6\}$

c) $A = \{\text{fyrhörningar}\}$
$B = \{\text{parallellogrammer}\}$
$C = \{\text{romber}\}$
$D = \{\text{kvadrater}\}$

5 På hur många sätt kan en tiokrona, en femkrona, en krona och en femtioöring placeras på en rad?

6 Hela grundmängden är $\{1, 2, 3, 4, \ldots 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ och $C = \{5, 6, 7, 8\}$. Ange

a) $\complement A \cap \complement B$

b) $\complement(A \cap C)$

c) $(A \cup B) \cap C$

d) $(A \cap B) \cap C$

e) $(A \cap C) \cup (\complement A \cap B)$

f) $(A \cup C) \cap (\complement A \cup B)$

7 I en klass med 30 elever spelar 24 golf och 9 fotboll. Alla i klassen utövar minst en av sporterna. Hur många utövar båda?

8 På hur många sätt kan man sätta samman en grupp med två flickor och två pojkar ur en klass som består av 18 flickor och 12 pojkar?

9 En affär har 40 stolar till försäljning. 16 är av skinn, 20 har armstöd och 12 säljs med tillhörande fotpall.

4 har alla tre egenskaperna,
8 har armstöd och är av skinn,
7 är av skinn och säljs med fotpall,
4 har armstöd och säljs med fotpall.

Hur många av stolarna saknar alla dessa tre egenskaper?

10 Utveckla $(a + b)^{10}$ med hjälp av Pascals triangel.

11 Ett bokstavslås med 10 bokstäver är så konstruerat att det kan öppnas om man trycker på fyra av bokstäverna i rätt ordning. Hur många sådana lås kan konstrueras?

12 Rita en graf med 5 noder A, B, C, D och E och minst 6 kanter. Grafen ska innehålla en cykel ABCA.

13 Hur många olika permutationer kan man göra av bokstäverna

a) LETA?

b) LATA?

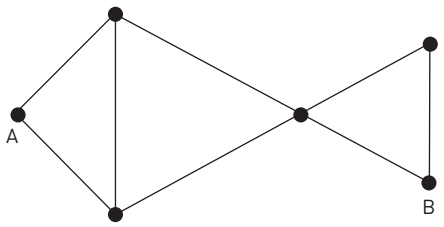
14 Varför slutar alla fakulteter större än 4! på talet 0?

15 Du kommer till en fest med 10 personer. Alla personer skakar hand med varandra. Hur många handskakningar blir det?

16 I en fotbollsserie spelar 10 lag. Varje lag spelar två matcher mot varje annat lag, nämligen en bortamatch och en hemmamatch. Hur många matcher spelas totalt i serien?

17 Varför är alla fakulteter utom 1! jämna tal?

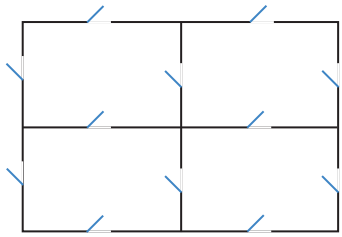
18 Hur många olika promenader finns det från A till B i grafen i figuren så att promenaden går högst 1 gång genom varje hörn?

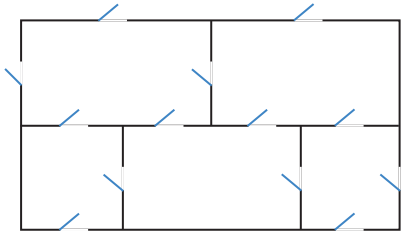


19 Följande figurer visar planen på hus där dörrarna är markerade.

a) Visa att det i båda husen går att ta en promenad som passerar varje dörr exakt en gång.

b) Kan denna promenad börja och sluta på samma ställe?





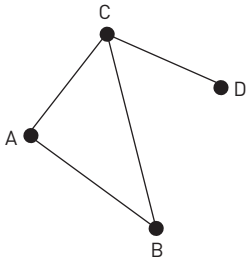
20 Bestäm termen som inte innehåller x vid utvecklingen av $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$.

21 Hur stor är sannolikheten att det i en grupp på 30 personer finns minst två som har samma födelsedag?

22 Visa att $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$ genom att använda definitionen för $\binom{n}{k}$.

23 Hur stor måste en grupp vara för att sannolikheten att minst två har samma födelsedag överstiger 50 %?

24 Det antal kanter som utgår från ett hörn i en graf kallas hörnets gradtal. I figuren har *A* och *B* gradtal 2, *C* gradtal 3 och *D* gradtal 1.



a) Titta på några av graferna som vi studerat i detta kapitel. Vad kan du säga om summan av hörnens gradtal i var och en av dessa grafer? (För grafen i figuren ovan är summan 2 + 2 + 3 + 1 = 8.)

b) Gäller den observation som du eventuellt gjort i uppgift a för alla grafer?

25 I kortspelet bridge får varje deltagare 13 kort.

a) Hur stor är sannolikheten att färgfördelningen blir 10 – 1 – 1 – 1 (t ex 10 hjärter, 1 ruter, 1 spader och 1 klöver)?

b) Hur stor är sannolikheten för fördelningen 5 – 5 – 3 – 0?

Facit och lösningar

KAPITEL 1

1101 Påståendena b, c och d är sanna.

1102 a) $2 \in \mathbb{N}$
b) $e \notin \mathbb{Q}$
c) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$
d) $\varnothing \subseteq \mathbb{N}$

1103 Påståendena a, c och d är sanna. (Alla kvadrater är även rektanglar, så påstående b är falskt).

1104 a) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

1105 a) $\in$ b) $\notin$ c) $\in$
d) $\in$ e) $\in$

1106 –1 och 0 ingår i båda mängderna.

1107 A och C

1108 $5 \in \mathbb{N}$ anger att talet 5 är ett element i mängden av de naturliga talen. $\{5\} \subseteq \mathbb{N}$ anger att mängden som endast innehåller talet 5 är en delmängd av de naturliga talen.

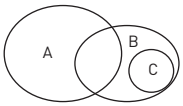
1109 $\{x | x = 2^n \text{ där } n > 0\}$

1110 $A = \{2, 3, 4\}$,
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
Elementet 3 tillhör mängden A men inte mängden B. Alltså är inte A en delmängd av B.

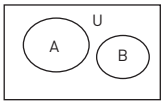
1111 Mängden av alla rationella tal.

1112 $B = \{b \in \mathbb{R}: b > 25/4\}$
(Då saknar andragradsekvationen reella lösningar).

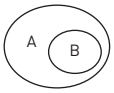
1113



1114



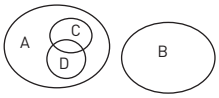
1115



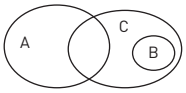
1116 T ex alla heltal n: $10 < n < 20$.

1117 T ex $\{1, 3, 5\}$

1118



1119



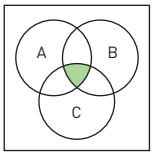
1120 EX: Mängderna $\{1, 2, 3, 4\}$ och $\{5, 6, 7, 8\}$ är disjunkta eftersom de inte innehåller några gemensamma element. Mängderna $\{1, 2, 3, 4\}$ och $\{4, 6, 7, 8\}$ är inte disjunkta.

1121 a) Nej
b) Arbetslösa män mellan 20 år och 30 år.

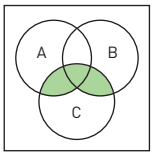
1122 $A \cup B =$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$

1123 $A \cup B = \{x: -3 < x < 3\}$
$A \cap B = \{x: -1 < x < 1\}$

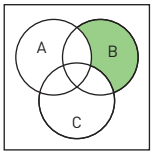
1124 a)



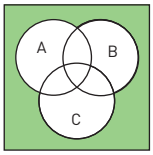
b)



c)



d)



1125 10 patienter

1126 $A^C = \{x: x \geq 5\}$

1128 a) $\{5, 9\}$
b) $\{1, 2, 4, 5, 9, 11, 13, 17, 21\}$
c) $\{1, 2, 4, 5, 9, 7, 11\}$
d) $\{2, 5, 9, 11\}$

1129 5 st

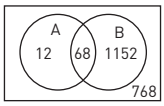
1130 Elementen i $A \cap B$ räknas två gånger i $|A| + |B|$.

1131 a) $A \backslash B$ b) $A \backslash (B \cup C)$

1132 a, d och e

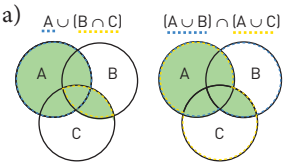
1133 20 %

1134 5,6 %
Uppgiften löses med fördel med ett venndiagram:
A: Personer med högt blodtryck
B: Personer som dricker
Rektangeln: personer som varken har högt blodtryck eller dricker.

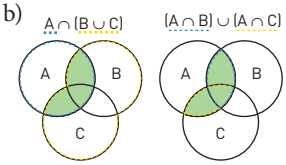


Antal personer som både dricker och har högt blodtryck: $0{,}85 \cdot 40 = 68$.
Antal personer med högt blodtryck som inte dricker: $80 - 68 = 12$.
Antal personer som dricker och inte har högt blodtryck: $1920 \cdot 0{,}6 = 1152$.
Antal personer som varken har högt blodtryck eller dricker: $1920 - 1152 = 768$
$68/(1152 + 68) \approx 5{,}6$ %

1135 a)



b)



1201 a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{52}$

1202 a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{9}{100}$
c) $\frac{9}{10}$

1203 a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{11}{12}$
d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{11}{36}$ f) $\frac{25}{36}$

1204 a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{7}{8}$

1205 a) 0,189 b) 0,973

1206 a) 6 b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{11}{16}$

1207 a) 0,61 b) 0,33
c) 0,997

1208 Nej. Eftersom några kort (bl a hjärter) redan är bortplockade ur leken är sannolikheten $\frac{10}{47} \cdot \frac{9}{46} \approx 0{,}04$.

1209 a) 0,09 b) 0,91 c) 0,05

1210 a) 0,02 b) 0,98 c) 0,017

1211 0,6

1212 Sannolikheten för att det skall hända minst en gång om försöket görs N gånger kan skrivas $\left(\frac{1}{N}\right)^N$.
Med $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$ beräknar vi sannolikheten för komplementhändelsen.

1213 I ett träddiagram utgörs händelsen av tre olika grenar med faktorerna 1, 2 och 45 i täljaren och 47, 46 och 45 i nämnaren. Sannolikheten beräknas till $3 \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{1}{46} \approx 0{,}28\%$.

1214 $1 - \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{100} \cdots$
$\cdots \frac{77}{100} \cdot \frac{76}{100} \approx 0{,}962 = 96{,}2\,\%$
Det står alltså nästan säkert samma nummer på två lappar. Prova i din klass och se om det stämmer.

1301 60

1302 $3^{13} = 1\,594\,323$

1303 731 161 600 kombinationer

1304 12

1305 $4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 +$
$+ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 64$

1306 $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$ kombinationer

1307 $5^7 = 78\,125$

1308 $\frac{8 \cdot 9^6}{9 \cdot 10^6} \approx 0{,}47$

1309 a) 5 040 b) 840
c) 1 320 d) 15 438 000

1310 $6! = 720$ sätt

1311 Prövning ger att alla $n > 10$ ger $n! > 1\,000\,000$.

1312 Nej. $\frac{8!}{4!} = \frac{40320}{24} = 1680$,
$\left(\frac{8}{4}\right)! = 2! = 2$

1313 52!

1314 a) 336 b) 12
c) 120 d) 6

1315 1 816 214 400

1316 24 sätt

1317 5 040

1318 1 814 400

1319 a) 360 b) 24

1320 $n \geq 4$

1321 För alla $n > 4$ innehåller $n!$ produkten $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ med både 2 och 5 som faktorer.

1322 b. T ex är $7! = 7 \cdot 6!$

1323 $\frac{5!}{3!}\Big/2 = 10$

1324 1/24

1325 T ex:
A: På hur många sätt kan du placera sex olika personer i en kö?
B: På hur många sätt kan du välja ut 3 personer till en styrelse (ordförande, sekreterare och kassör) om du väljer ur en grupp på 6 personer?
C: Du skall lotta ut tre biobiljetter till ett handbollslag med sex spelare. På hur många sätt kan detta ske om en spelare kan vinna flera biljetter?

1326 8! = 403 020

1327 60

1328 Ja, om man definierar 0! = 1.

1329 a) 20 b) 45 c) 45

1330 a) 560 b) 1 365
c) 1 365

1331 5 005

1332 a) 3 276 a) 19 656

1333 a) 9 b) 4

1334 a) 4 950 b) 210

1335 10 personer kan uppenbart väljas på 1 sätt ur en grupp på 10 personer.
Det kan även skrivas som $\binom{10}{10} = \frac{10!}{10!\cdot 0!}$. Om detta uttryck ska bli 1, så måste 0! = 1.

1336 Om det spelar roll i vilken ordning du väljer ut de tre spelarna så skulle Tords sätt vara korrekt. I detta fall spelar det knappast någon roll. Då borde han gjort så här: $\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\cdot 8!} = 165$.

1337 a) $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{221} \approx 0{,}0045$

b) 0,059

1338 a) 0,243 b) 0,242

1339 0,0056

1340 0,0015

1341 $\binom{5}{2} = 10$

1342 $\binom{13}{5}\cdot\binom{8}{3} = 70072$

1343 0,053 (gynnsamma =
$\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5} = 756756$,
möjliga = 3^{15} = 14 348 907.)

1344 1 6 15 20 15 6 1

1345 $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + \ldots$

1346 220

1347 a) $1 + 3x + 3x^2 + x^3$
b) $1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

1348 $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

1349 a) $a^4 - 4a^3b + 6a^2ba - 4ab^3 + b^4$
b) $p^3 - 6p^2q + 12pq^2 - 8q^3$

1350 $\binom{13}{10} = \binom{13}{3}$ för när du väljer ut 10 element av totalt 13 så har du ju indirekt valt ut de 3 som är kvar och om du väljer ut 3 element av 13 så har du också ”valt” de 10 som är kvar.

1351 a) 120 b) 91 c) 100

1352 Båda leden blir 35. Elementen i rad 7 i Pascals triangel kan fås fram genom att summera de två ovanliggande elementen i rad 6.

1353 5 120 $\left(\binom{8}{1}(2x)^7\left(5x^3\right)^1 = \right.$
$\left. = 8\cdot 2^7\cdot 5\cdot x^{10} = 5120x^{10}\right)$

1354 7:e termen blir 672 000

1355 2^{n-1}

1356 $-117 + 44i$

1357 Använd $2^n = (1 + 1)^n$ och binomialsatsen.

1358 a) $\frac{1}{216}$ b) $\frac{125}{216}$
c) $\frac{91}{216}$ d) $\frac{25}{72}$

1359 a) 0,61 b) 0,33
c) 0,997

1360 a) 7,29 % b) 91,9 %

1361 a) 15,5 % b) 93,0 %
c) 83,8 %

1362 a) $\binom{10}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 22{,}8\%$

b) $1 - \left[\binom{10}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7\right] \approx$
$\approx 44{,}1\ \%$

c) $\binom{10}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx$
$\approx 0{,}036\ \%$

1363 Resultatet blir 1. Det skulle kunna vara beräkningen av sannolikheten att få 0, 1, 2, eller 3 sexor vid tre kast med en tärning. Det blir givetvis 1.

1364 a) $p_k = \binom{8}{k} 0{,}5^k (1-0{,}5)^{8-k} =$

$= \binom{8}{k} 0{,}5^k 0{,}5^{8-k} =$

$= \binom{8}{k} 0{,}5^{k+8-k} = \binom{8}{k} 0{,}5^8$

b) 21,9 %

1365 a) Anta att du singlar slant 100 gånger. Hur stor är chansen att du får krona exakt 50 gånger?

b) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 7\cdots 97\cdot 99}{\underbrace{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 98\cdot 100}_{\text{bryt ut 50 tvåor}}} =$

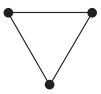
$= \dfrac{1\cdot 3\cdot 7\cdots 97\cdot 99}{2^{50}\cdot 50!} =$

$= \dfrac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdots 97\cdot 99)(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 98\cdot 100)}{2^{50}\cdot 50!\cdot \underbrace{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 98\cdot 100)}_{\text{bryt ut 50 tvåor}}} =$

$= \dfrac{100!}{2^{50}\cdot 50!\cdot 50!\cdot 2^{50}} =$

$= \dfrac{100!}{50!\cdot 50!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{50}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{50}$

1401 a) 5 noder, 6 kanter
b) 4 noder, 5 kanter
c) 3 noder, 6 kanter

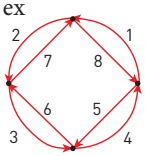
1402 a)

b)

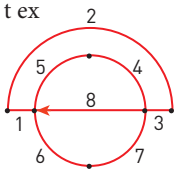
c)

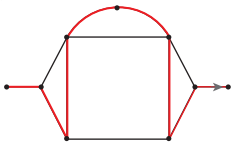
1403 D och E har graden 1. A och B graden 2 och C graden 4.

1404 a) T ex CABC
b) T ex DBCD, eller BAEDB

1405 Graferna har lika många noder och kanter. Dessutom kan kanterna och noderna paras ihop, så att motsvarande noder förbinds med motsvarande kanter. (Graferna sägs vara *isomorfa*.)

1406 a) Ja, t ex


b) Ja, t ex


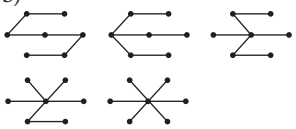
1407 Ja, t ex


1408 a) T ex ADECB.
b) T ex ABCDEGFA.

1409 a) T ex ABCDEFD.
b) T ex ABGEHBCDEFA.

1410 a) Nej. Anta att A är start- och slutpunkt. Då måste B passeras 2 gånger.
b) Nej. AB måste passeras 2 gånger.

1411 a) T ex

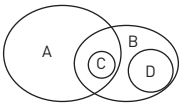
b)


c) Endast trädet med två löv.

1412 Det kan visas att detta är ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att hitta en Eulercykel. Beviset ingår dock inte i denna kurs.

TEST 1

1 a, c och d är sanna.

2 T ex


3 500

4 5! = 120

5 6!/(6 – 4)! = 360

6 a) $\binom{12}{5} = \dfrac{12!}{5!\cdot 7!} =$

$= \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} =$

$= 11\cdot 9\cdot 8 = 11\cdot 72 =$

$= 720 + 72 = 792$

b) EX: Hur många olika delmängder med fem element finns i en mängd med 12 element?

7 a) $\dfrac{1}{5\cdot 4\cdot 3} = \dfrac{1}{60}$

b) $\dfrac{1}{\binom{5}{3}} = \dfrac{3!\cdot 2!}{5!} = \dfrac{2}{5\cdot 4} = \dfrac{1}{10}$

8 a) {2, 4, 6}
b) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14}
c) 11

9 c och d

10 60, $\left(\binom{6}{3}(x^2)^4(2x^3)^2 = \right.$

$= \dfrac{6!}{4!2!}\cdot 4\cdot x^8x^6 = \dfrac{6\cdot 5}{2}\cdot 4\cdot x^{14} =$

$\left. = 60x^{14}\right)$

11 a, b och c är sanna.

12 a och c

13 14 elever

14 $23^3\cdot 10^3 - 23^3 = 12\,154\,833$

15 På $28! \approx 3{,}05\cdot 10^{29}$ sätt.

16 På $\dfrac{28!}{(28-5)!} = 11\,793\,600$ sätt.

17 $\dfrac{1}{\binom{35}{7}} = \dfrac{1}{6\,724\,520}$

18 $\frac{88}{54145} \approx 0{,}0016$

19 53 130

20 $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7 \approx 20\%$

21 $\binom{6}{6}+\binom{6}{5}+\binom{6}{4}+\binom{6}{3}+$
$+\binom{6}{2}+\binom{6}{1}+\binom{6}{0}=64$

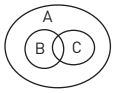
BLANDADE UPPGIFTER

1 a) {2, 3, 4, 6}
b) {1, 2, 3}
c) {2}
d) {23, 29, 31, 37}

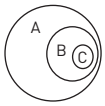
2 a) falsk b) sann
c) falsk d) falsk

3 a) $\frac{7}{16}$ b) $\frac{9}{16}$

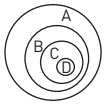
4 a)



b)



c)



5 24 sätt

6 a) {6, 8, 9, 10}
b) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10}
c) {5, 7}
d) {5}
e) {5, 7}
f) {2, 3, 5, 6, 7, 8}

7 3

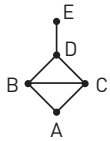
8 10 098

9 7

10 $a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 +$
$+ 120a^7b^3 + 210a^6b^4 +$
$+ 252a^5b^5 + 210a^4b^6 +$
$+ 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 +$
$+ b^{10}$

11 5 040

12 T ex



13 a) 24 b) 12

14 De innehåller såväl faktorn 2 som 5.

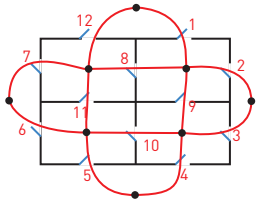
15 45 handskakningar

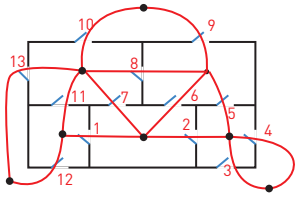
16 90

17 De innehåller alla faktorn 2.

18 8

19 a) Konstruera grafer (exempel nedan). Problemet reduceras då till att hitta Eulervägar.





b) Ja i vänstra, och nej i högra huset.

20 84

21 71 %

22 $\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\frac{16!}{5!11!}+\frac{16!}{6!10!}=$
$=\frac{6\cdot 16!}{6\cdot 5!11!}+\frac{11\cdot 16!}{6!10!\cdot 11}=$
$=\frac{17\cdot 16!}{6!11!}=\binom{17}{6}$

23 23 personer

24 a) Summan är alltid ett jämnt tal.
b) Ja.

25 a) $4{,}0 \cdot 10^{-6}$ b) 0,009

KAPITEL 2

2101 a och c

2102 b

2103 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

2104 5, 17, 41

2105 a) $2^2 \cdot 7$ b) $2^2 \cdot 3^2$
c) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

2106 a) 21 · 242 är delbart med 7, eftersom 21 är delbart med 7.
b) 35 + 77 är delbart med 7, eftersom 35 och 77 är delbara med 7.
c) 14 · 62 + 15 · 63 är delbart med 7, eftersom 14 och 63 är delbara med 7.

2107 a) 11 · 288 är delbart med 9, eftersom 288 (med siffersumman 18) är delbart med 9.
b) 999 + 181 881 är delbart med 9, eftersom 999 och 181 881 är delbara med 9.
c) 5 · 81 + 8 · 351 är delbart med 9, eftersom 81 och 351 är delbara med 9.

2108 a) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
b) $2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
c) 131

2109 Endast C

2110 a) $2^7 \cdot 3^2 \cdot 11$
b) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 13$
c) $3^7 \cdot 5 \cdot 17$

2111 a) $2^3 \cdot 3$ b) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
c) $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

2112 Alla naturliga tal som är delbara med 3.

2113 $\frac{n^3-n}{3}=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$.
Talen $n - 1$, n eller $n + 1$ är konsekutiva tal. Något av dessa måste alltså vara delbart med 3. Detta medför att resultatet blir ett heltal.

BILDFÖRTECKNING

Omslagsfoto: Martin Barraud /Matton Images

6–7 Shutterstock
15 Fredrik Sandberg/Scanpix
19 Helen King/Corbis/Scanpix
26 Shutterstock
29 Keith Sherwood/Shutterstock
34 Mikael Sjöberg/XP/Scanpix
36, 42, 44 Shutterstock
53 Anders Wejrot/Scanpix
61 Hussein el-Alawi/Sydsvenskan/IBL
62–63 Shutterstock
68 Wikipedia
69 Bridgeman Library/IBL
71, 79, 82, 86, 90, 100 Shutterstock
78 Steve Marcus/Reuters/Scanpix
106 Ulf Palm/Scanpix
110 Torbjörn Andersson/Scanpix
112–113, 116 Shutterstock
118 Stephanie Schuller/SPL/IBL
121, 122 Shutterstock
130 Adam Haglund/Maskot/Scanpix
135 Richard Peters/Rex Features/IBL
136, 141, 142, 145, 147 Shutterstock
152 Fredrik Sandberg/Scanpix
155 Charles Platiau/Reuters/Scanpix
156 NASA
157 Scanpix
161 Shutterstock
166 NASA
173 Roger Turesson/DN/Scanpix
180 Julian Stratenschulte/DPA/IBL
183 ESA, NASA, R Gendler, J GaBany
198 Nils-Johan Norenlind/NordicPhoto
199 Shutterstock
202 SPL/IBL
205 Shutterstock